(*exemple texte session 2006*)

Résumé : On se propose ici de modéliser le trafic routier en identifiant chaque véhicule à un point, dont la vitesse dépend de sa distance au véhicule qui le précède. Cette approche conduit à un système d'équations différentielles.

Mots clefs : Problème de Cauchy, méthodes à un pas.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Introduction, modèle

1.1. *Description générale du modèle*

On cherche à modéliser le mouvement de N véhicules circulant sur une route rectiligne. Les positions des centres de ces véhicules sont des fonctions du temps notées

$$x_1(t) < x_2(t) < \cdots < x_N(t).$$

On suppose que les véhicules avancent vers la droite (sens des x positifs), de telle sorte que l'indice N correspond au véhicule en tête. On note $\alpha_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$ la distance entre les centres des véhicules n et $n+1$. On suppose que le trafic est bloqué en dessous d'une certaine distance critique α_C, et on note enfin V la vitesse maximale autorisée.

On s'intéresse ici à des modèles basés sur une expression de la vitesse du véhicule n en fonction de sa distance au véhicule précédent (on note $\dot{x}_n$ la dérivée de la position du véhicule n par rapport au temps) :

$$v_n = \dot{x}_n = VF(\alpha_n), \tag{1}$$

où $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, nulle sur l'intervalle $[0, \alpha_C]$, strictement croissante, C^1, concave sur $[\alpha_C, +\infty[$, et qui tend vers 1 quand α tend vers $+\infty$.

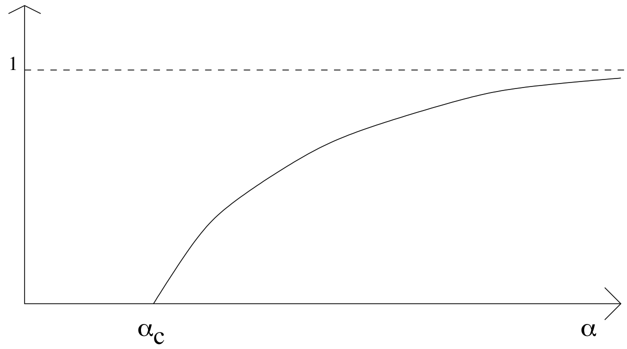

Fig. 1 : fonction F.

On supposera que la vitesse du véhicule N est donnée par $VF(\alpha_\infty)$, où α_∞ est un paramètre.

1.2. *Analyse du modèle*

Ce modèle est bien conforme à l'hypothèse selon laquelle un véhicule au repos ne démarre que lorsque sa distance au véhicule précédent dépasse α_C. D'autre part un véhicule « seul » (avec α_n très grand) se déplace à une vitesse proche de la vitesse maximale autorisée.

Si l'on considère maintenant le cas de 2 véhicules, le véhicule en tête avançant à la vitesse uniforme $VF(\alpha_\infty) > 0$, la distance α entre les deux véhicules vérifie une équation différentielle du type

$$\dot{\alpha} = G(\alpha),$$

où $G : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constante sur $[0, \alpha_c]$, strictement décroissante sur $[\alpha_c, +\infty[$, et vérifiant $G(0) > 0$, $G(+\infty) < 0$. La distance évolue donc vers l'unique point fixe $\alpha = \alpha_\infty$. De façon générale (N quelconque), pour toute situation initiale et valeur de paramètre $\alpha_\infty > \alpha_C$ (qui conditionne la vitesse du véhicule en tête), le système va évoluer vers une situation où la distance entre deux véhicules est α_∞, et la vitesse uniforme $V_\infty = VF(\alpha_\infty)$. On peut le vérifier en introduisant le changement de variable $y_n = x_n - V_\infty t$, de telle sorte que la configuration $\alpha_n = \alpha_\infty$ pour tout n correspond à un point fixe du sytème. La vitesse du véhicule en tête se « propage » donc vers l'arrière du groupe de véhicule. L'objet de ce texte est l'étude de ce phénomène de propagation.

On s'intéresse dans un premier temps au démarrage d'un train de véhicules à un feu, puis à un trafic « fluide ».

2. Démarrage à un feu

On s'intéresse ici au cas d'un groupe de véhicules initialement au repos (bloqués à un feu rouge), qui se mettent en mouvement quand le feu passe au vert.

2.1. *Simulation numérique*

On résout numériquement le système différentiel présenté ci–dessus, avec F définie par

$$F(\alpha) = \left| \begin{array}{ll} 1 - \exp\left(-\frac{\alpha-\alpha_C}{\alpha_V-\alpha_C}\right) & \text{si } \alpha > \alpha_C \\ 0 & \text{si } \alpha \leq \alpha_C \end{array} \right.$$

où α_V est l'ordre de grandeur de la distance de sécurité entre deux véhicules roulant à la vitesse V. On discrétise l'intervalle en temps

$$t_0 = 0 < t_1 = \tau < t_2 = 2\tau < \cdots < t_K = K\tau = T,$$

et on note x_n^k l'approximation de x_n au temps t_k. On utilise un schéma d'Euler explicite

$$\frac{x_n^{k+1} - x_n^k}{\tau} = V\,F(\alpha_n^k),$$

avec $\alpha_n^k = x_{n+1}^k - x_n^k$.

On applique le schéma présenté ci–dessus au cas d'un train de véhicules initialement au repos (feu rouge) : on suppose les véhicules uniformément espacés au temps initial

$$x_n^0 = n\alpha_{\text{init}},$$

avec $\alpha_{\text{init}} < \alpha_C$. On suppose que le feu passe au vert à $t = 0$, ce que l'on modélisera en donnant une certaine valeur à α_∞. On utilise les paramètres numériques suivants (distances en mètres, temps en secondes, vitesses en mètres par seconde) :

$$N = 50\ ,\ \ \alpha_C = 10\,m\ ,\ \ \alpha_V = 40\,m\ ,\ \ \alpha_\infty = 60\,m\ ,\ \ V = 30\,ms^{-1}.$$

On suppose les véhicules uniformément répartis à $t = 0$, la distance entre deux véhicules consécutifs étant égale à $\alpha_{\text{init}} = 5\,m$. On modélise le mouvement sur 20 secondes, avec un pas de temps $\tau = 0.2$ s.

La figure 2 représente l'état final. Les points sur l'axe des x représentent les véhicules (les x_n), et la courbe représente les distances au véhicule précédent relativement à α_∞ (on a représenté les α_n/α_∞).

2.2. *Vitesse de propagation*

On cherche ici à obtenir des informations sur la vitesse de propagation associée au phénomène mis en évidence ci–dessus. On considère donc comme précédemment la situation de N véhicules initialement au repos, à distance α_{init} du véhicule précédent, le véhicule de tête étant supposé avoir la vitesse constante $V_\infty = VF(\alpha_\infty)$ dès l'instant initial. On cherche un majorant de la vitesse de propagation c, qu'on définit comme la vitesse du point de séparation entre le groupe des véhicules immobiles et le groupe des véhicules en mouvement. On définira c comme un nombre positif, étant entendu que le phénomène associé correspond à une propagation dans le sens opposé au sens de la marche des véhicules.

On remarque que la vitesse relative entre deux véhicules successifs est toujours majorée par $V_\infty = VF(\alpha_\infty)$, de telle sorte que les x_n du système précédent sont majorés respectivement par les $\tilde{x}_n$, obtenus comme solutions du cas limite où le véhicule n accède instantanément à la vitesse V_∞ dès que $\alpha_n \geq \alpha_{\mathrm{C}}$. Dans ce cas, le temps de passage de l'information d'un véhicule à l'autre est le temps qu'il faut à la distance α_n pour passer de α_{init} à α_{C}, le véhicule n étant fixe, et le véhicule $n+1$ avançant à la vitesse V_∞ : ce temps est

$$\triangle t = \frac{\alpha_{\mathrm{C}} - \alpha_{\mathrm{init}}}{V_\infty}.$$

La distance parcourue par l'information étant α_{init}, la vitesse de propagation associée est

$$c_M = \frac{\alpha_{\mathrm{init}}}{\alpha_{\mathrm{C}} - \alpha_{\mathrm{init}}} V_\infty,$$

qui est un majorant de la vitesse c.

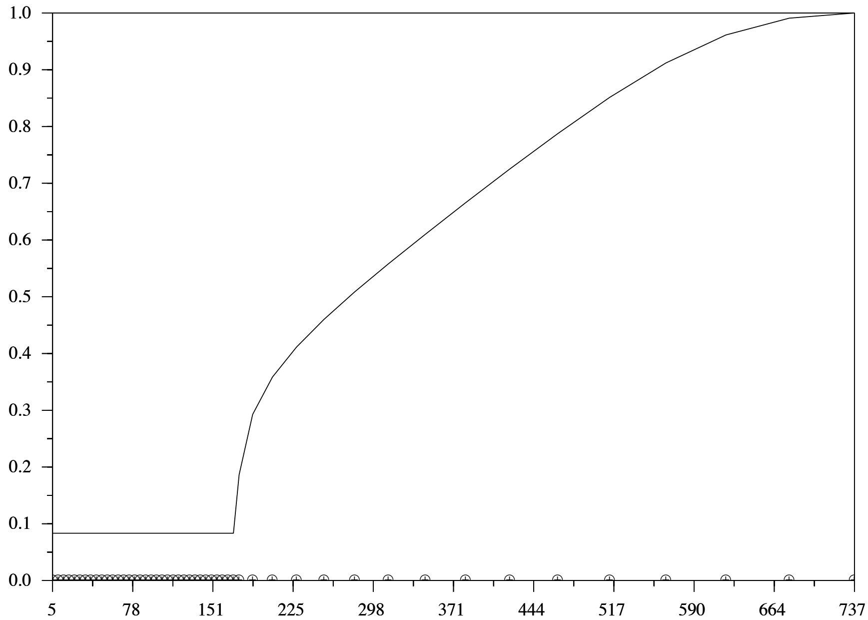

Fig. 2 : Positions et distances.

3. Trafic normal

On se place maintenant dans une situation du type « vitesse de croisière », où tous les véhicules ont une même vitesse égale à la vitesse du véhicule en tête, toujours conditionnée par une distance « vue » par ce véhicule : $V_\infty = VF(\alpha_\infty)$. On se propose d'étudier la propagation de petites perturbations au voisinage de cet état. Plus précisément, on cherche à établir si l'information « remonte le courant », c'est-à-dire si une perturbation se propage vers l'arrière à une vitesse supérieure en module à la vitesse des véhicules. Cette caractéristique est essentielle lorsque l'on s'intéresse à l'arrivée en centre urbain d'un trafic autoroutier. L'approche du centre provoquant inévitablement des perturbations du trafic, il est vital de savoir si ces perturbations vont rester localisées ou se propager vers l'amont.

3.1. *Développement au voisinage d'un état stationnaire*

On considère la situation suivante : un véhicule avançant à la vitesse $V_\infty = VF(\alpha_\infty) > 0$ est suivi par $N-1$ véhicules à distance α_∞ du véhicule précédent, avançant eux aussi à la vitesse V_∞, de telle sorte que les $x_n(t)$ correspondants sont solutions de (1). On remarque que les $y_n = x_n - V_\infty t$ correspondent à un point fixe du système d'équations différentielles

$$\dot{y}_n = V(F(\alpha_n) - F(\alpha_\infty)), \tag{2}$$

avec $\alpha_n = y_{n+1} - y_n$.

On s'intéresse à des solutions du système voisines de cet état. Les α_n étant supposés voisins de α_∞, on écrit

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_n &= V(F(\alpha_{n+1}) - F(\alpha_n)) \\ &\approx VF'(\alpha_\infty)(\alpha_{n+1} - \alpha_n). \end{aligned}$$

On identifie maintenant les α_n aux valeurs d'une fonction régulière $f(x,t)$ en des points équirépartis (à distance α_∞), de telle sorte que, formellement, le système approché ci–dessus peut être vu comme une discrétisation de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} - VF'(\alpha_\infty)\alpha_\infty \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

On reconnaît une équation de transport (avec $c = VF'(\alpha_\infty)\alpha_\infty$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} - c\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

dont les solution s'écrivent $f_0(x+ct)$, où f_0 est une fonction de la variable d'espace. On met ainsi en évidence la présence d'un phénomène de propagation vers les x négatifs à la vitesse $c = VF'(\alpha_\infty)\alpha_\infty$.

3.2. *Sens de la propagation*

La vitesse c a été définie sur le train de véhicules qui se déplace globalement à vitesse V_∞. La vitesse réelle de propagation (pour un observateur extérieur) est donc $V_\infty - c$. On aborde maintenant la question du signe de

$$V_\infty - c = \alpha_\infty V\left(\frac{F(\alpha_\infty)}{\alpha_\infty} - F'(\alpha_\infty)\right).$$

Dans le cas limite $\alpha_C = 0$, la concavité de F implique $V_\infty - c \geq 0$.
Dans le cas $\alpha_C > 0$, il s'agit d'étudier le signe de

$$\phi(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{\alpha} - F'(\alpha)$$

entre α_C et $+\infty$. On a $\phi(0) = -F'(\alpha_C) < 0$ et $\phi(+\infty) = 0$. Il s'agit donc de déterminer si ϕ s'annule. Or on a $\phi(\alpha) = 0$ si et seulement si la droite $y = F'(\alpha)x$ est tangente (au point $(\alpha, \phi(\alpha))$) au graphe de F. De façon générale, une droite passant par l'origine et de pente positive intersecte le graphe de F en 2 points (pente petite), zéro point (pente grande), ou exactement 1 point (cas critique : les courbes sont tangentes). La fonction ϕ s'annule donc en un point α_0 unique.

On peut résumer ce qui vient d'être établi de la façon suivante

- Pour $\alpha_\infty > \alpha_0$ (donc au–delà d'une certaine « fluidité » du trafic), on a $V_\infty - c \geq 0$: les perturbations ne se propagent pas vers l'amont.
- Pour $\alpha_\infty < \alpha_0$, alors $V_\infty - c \leq 0$: les perturbations sont susceptibles de se propager vers l'amont, à la vitesse

$$V_\infty - c = \alpha_\infty V \left(\frac{F(\alpha_\infty)}{\alpha_\infty} - F'(\alpha_\infty) \right).$$

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- Préciser et développer l'analyse du modèle esquissée dans l'introduction.
- Modéliser numériquement les phénomènes évoqués dans la section 3.
- Proposer d'autres méthodes pour résoudre numériquement le système différentiel présenté dans la section 2.1.
- Préciser la discussion sur le signe de la vitesse de propagation dans la section 3.2.
- Proposer des moyens d'estimer numériquement le α_0 de la section 3.2, la fonction F étant donnée.
- Modéliser d'autres situations, comme par exemple
  (1) Réaction d'un ensemble de véhicules roulant initialement à vitesse constante au freinage brusque du véhicule en tête.
  (2) Conducteurs aux comportements différents (la fonction F dépend de n).
- Commenter les aspects non réalistes du modèle (temps de réaction des conducteurs non pris en compte, accidents non « modélisables » , ...), et envisager des moyens de l'améliorer.