

(public 2008) VOIR LES ONDES DANS LE SANG

Résumé : On s'intéresse à la modélisation et au calcul numérique du pouls sanguin.

Thème applicatif, mots clefs : Équations aux dérivées partielles, méthode des différences finies

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

On s'intéresse à la modélisation, l'étude mathématique et la simulation numérique d'un aspect particulier de la circulation sanguine : le pouls.

1. Modélisation

Pour aborder rapidement un phénomène d'une telle complexité, on va devoir procéder à plusieurs simplifications. Pour commencer, on va ne considérer qu'une seule artère rectiligne de longueur L , modélisée par un tuyau élastique à section circulaire. L'aire $A(t, x)$ d'une section de l'artère dépend du temps t et de sa position x sur l'axe $[0, L]$.

On suppose qu'en première approximation le sang est un fluide non visqueux, c'est-à-dire que les seules forces qui s'exercent en son sein sont des forces de pression. Ceci signifie que les forces qui s'exercent sur une surface tracée dans le fluide sont colinéaires à la normale intérieure à cette surface, le facteur de proportionnalité étant la pression p qui est une fonction scalaire positive de la position dans le fluide et du temps. On suppose aussi que la vitesse du sang selon l'axe de l'artère $w(t, x)$ ne dépend que du temps et de l'abscisse sur cet axe. En d'autres termes, on fait l'hypothèse que le fluide s'écoule « par tranches » avec un profil de vitesse uniforme sur chaque section de l'artère. De façon cohérente avec cette hypothèse, on suppose enfin que p ne dépend que de t et de x .

Considérons une tranche de fluide située entre x_0 et $x_0 + \Delta x$ à l'instant t_0 . Nous allons suivre l'évolution de cette tranche de fluide avec le temps. On note $x_\xi(t)$ l'abscisse au temps $t \geq t_0$ de la section de fluide qui se trouvait à l'abscisse ξ à l'instant t_0 . Cette abscisse est donc solution du problème de Cauchy $x'_\xi(t) = w(t, x_\xi(t))$, $x_\xi(t_0) = \xi$. Le volume de la tranche de fluide est donc devenu $V(t) = \int_{x_{x_0}(t)}^{x_{x_0+\Delta x}(t)} A(t, \xi) d\xi$. Faisons maintenant l'hypothèse que le sang

est incompressible. Ceci signifie que le volume en question est indépendant du temps. Calculons donc la dérivée de ce volume par rapport au temps. Il vient,

$$(1) \quad V'(t) = A(t, x_{x_0+\Delta x}(t))x'_{x_0+\Delta x}(t) - A(t, x_{x_0}(t))x'_{x_0}(t) + \int_{x_{x_0}(t)}^{x_{x_0+\Delta x}(t)} \frac{\partial A(t, \xi)}{\partial t} d\xi$$

Écrivant que $V' = 0$, puis faisant tendre Δx vers 0, on en déduit une première équation dite de conservation :

$$(2) \quad \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(Aw)}{\partial x} = 0.$$

Écrivons maintenant la loi de Newton sur cette tranche de fluide à l'instant t_0 . On néglige l'accélération de la pesanteur. Si ρ_0 désigne la masse volumique du sang, la quantité de mouvement de la tranche à l'instant t est donnée par

$$(3) \quad P(t) = \int_{x_{x_0}(t)}^{x_{x_0+\Delta x}(t)} \rho_0 w(t, \xi) A(t, \xi) d\xi$$

et la loi de Newton nous dit que

$$(4) \quad \frac{dP}{dt}(t_0) = F_{\text{am}} + F_{\text{av}}$$

où F_{am} est la résultante des forces de pression que le reste du fluide exerce sur la section amont $\xi = x$, F_{av} la résultante des forces de pression qui s'exercent sur la section aval $\xi = x + \Delta x$ (on néglige les forces de pression qui s'exercent sur la surface latérale de la tranche en contact avec la paroi de l'artère). On obtient

$$F_{\text{am}} = p(t_0, x)A(t_0, x) \quad \text{et} \quad F_{\text{av}} = -p(t_0, x + \Delta x)A(t_0, x + \Delta x).$$

La loi de Newton nous conduit donc à une seconde équation de conservation

$$(5) \quad \frac{\partial(Aw)}{\partial t} + \frac{\partial(Aw^2 + \rho_0^{-1}Ap)}{\partial x} = 0.$$

Pour compléter le système, il faudrait maintenant décrire le comportement de l'artère. On n'entrera pas ici dans le détail de cette modélisation et l'on admettra qu'elle conduit à une loi d'état $A \mapsto \hat{p}(A)$ telle que $p(t, \xi) = \hat{p}(A(t, \xi))$. Cette loi d'état fait intervenir les caractéristiques de l'artère, mais on ne l'explicitera pas ici.

Introduisant les variables $A(t, \xi)$ et $q(t, \xi) = A(t, \xi)w(t, \xi)$, qui n'est autre que le flux sanguin à travers chaque section, on obtient finalement à partir de (2) et (5) le système

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{q^2}{A} + \frac{A\hat{p}(A)}{\rho_0} \right)}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

soit encore

$$(7) \quad U = \begin{pmatrix} A \\ q \end{pmatrix}, \quad f(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{A} + \frac{A\hat{p}(A)}{\rho_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(f(U))}{\partial x} = 0.$$

Un système de cette forme est ce que l'on appelle un *système hyperbolique non linéaire* (sous certaines hypothèses sur la loi d'état \hat{p}), et son étude théorique se situe bien au delà du niveau de ces quelques lignes.

2. Linéarisation

Il est hors de question de s'attaquer directement au système (7). On remarque dans un premier temps que tout couple (\bar{A}, \bar{q}) de constantes en est solution. On va s'intéresser à des solutions approchées de la forme $(A_0 + \alpha, q)$, où $A_0 = \pi r_0^2$ est l'aire de la section de l'artère à l'équilibre à vide, ce qui signifie que $\hat{p}(A_0) = 0$, et α et q sont supposées petites, ainsi que leurs dérivées successives. Ceci nous conduit à linéariser les équations en $(A_0, 0)$, en ne retenant que les termes linéaires par rapport à (α, q) . Cette procédure entièrement formelle et qui restera ici sans justification mathématique conduit au système suivant,

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{A_0 \hat{p}'(A_0)}{\rho_0} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

Sous l'hypothèse, vérifiée dans la pratique, que $\hat{p}'(A_0) > 0$, on voit donc que α et q (et donc aussi p et w) satisfont l'équation des ondes

$$(9) \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec la vitesse de propagation

$$(10) \quad c = \sqrt{\frac{A_0 \hat{p}'(A_0)}{\rho_0}}.$$

Cette brève analyse met en évidence la présence d'un phénomène de propagation ondulatoire des diverses variables (flux, pression, aire de la section), qui correspond au pouls. La vitesse c est donc la vitesse de propagation du pouls le long de l'artère.

En écrivant plus en détail la loi d'état \hat{p} , on obtient la formule $\hat{p}'(A_0) = \frac{Eh}{2\pi r_0^3}$ que nous admettrons ici, où E est un coefficient décrivant la rigidité de l'artère, h est l'épaisseur de la paroi artérielle et r_0 son rayon à vide. En remplaçant dans la formule (10), on obtient la formule dite de Young

$$(11) \quad c = \sqrt{\frac{Eh}{2\rho_0 r_0}}.$$

Dans le cas de l'aorte, des valeurs moyennes expérimentales de $E = 10^6 \text{N/m}^2$, $h = 0,1 \text{cm}$, $r_0 = 1 \text{cm}$ et $\rho_0 = 10^3 \text{kg/m}^3$ donnent une vitesse de propagation de l'ordre de 7m/s , ce qui correspond assez bien aux observations. Pour une fréquence de battements de cœur de 1Hz , la longueur d'onde correspondante est de 7m , ce qui est largement supérieur à la longueur de toute artère. En d'autres termes, à l'échelle d'une artère, on ne « voit » pas le pouls se propager.

3. Étude numérique

On se propose d'approcher les solutions de (7), complété par des conditions initiales et des conditions aux limites, à l'aide d'un schéma aux différences finies. Pour simplifier, on choisit des unités telles que $A_0 = 1$, $\rho_0 = 1$ et on suppose que la loi d'état est de la forme $\hat{p}(A) = A - 1$.

On choisit donc un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx et l'on pose $t_n = n\Delta t$ et $x_j = j\Delta x$, pour n et j entiers. Soit $\lambda = \Delta t / \Delta x$. On note $\bar{U}_{n,j} = \begin{pmatrix} \bar{A}_{n,j} \\ \bar{q}_{n,j} \end{pmatrix}$ une approximation de $U(t_n, x_j)$, et l'on pose

$$\bar{f}_{n,j} = \begin{pmatrix} \bar{q}_{n,j} \\ \frac{\bar{q}_{n,j}^2}{\bar{A}_{n,j}} + \frac{\bar{A}_{n,j}\hat{p}(\bar{A}_{n,j})}{\rho_0} \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, le schéma proposé, appelé schéma de Lax-Friedrichs, s'écrit sous la forme

$$(12) \quad \bar{U}_{0,j} = U_0(x_j), \quad \bar{U}_{n+1,j} = \frac{1}{2}(\bar{U}_{n,j+1} + \bar{U}_{n,j-1}) - \frac{\lambda}{2}(\bar{f}_{n,j+1} - \bar{f}_{n,j-1}).$$

Comme on travaille ici sur un intervalle d'espace fini, $[0, L]$, on est amené à poser $\Delta x = \frac{L}{M+1}$ avec M entier. Les relations (12) ne sont correctement définies que pour $j = 1, \dots, M$. Or, dans les systèmes hyperboliques, que ce soit au niveau théorique ou au niveau numérique, la question des conditions aux limites à imposer ou pas aux extrémités, c'est-à-dire pour $j = 0$ et $j = M + 1$, est fort délicate.

Dans notre cas, on va considérer que $x = 0$ ou $j = 0$ est l'entrée de l'artère, et que l'aire de la section et le flux de sang y sont imposés par les mouvements du cœur, c'est-à-dire $U(t, 0) = G(t)$ où G est donnée. On posera donc

$$(13) \quad \bar{U}_{n,0} = G(t_n).$$

On laissera par contre la sortie de l'artère $x = L$ ou $j = M + 1$ libre en n'imposant aucune condition supplémentaire en ce point. Au niveau du schéma, une correction est nécessaire puisque la formule de Lax-Friedrichs n'y est pas définie. On propose la discrétisation suivante du système hyperbolique :

$$(14) \quad \bar{U}_{n+1,M+1} = \bar{U}_{n,M+1} - \lambda(\bar{f}_{n,M+1} - \bar{f}_{n,M}).$$

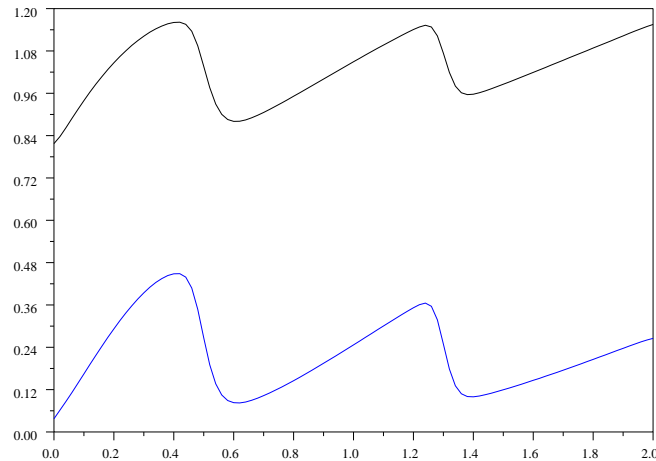
On trouvera plus bas des résultats de calculs avec le schéma de Lax-Friedrichs (12) corrigé par (13)–(14), pour le système non linéaire (7) et pour le système linéaire (8), avec les données initiales et en entrée

$$U_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,22 \end{pmatrix}, \quad G(t) = \begin{pmatrix} 1 + 0,2 \sin(10t) \\ 0,2(1,1 + \sin(10t)) \end{pmatrix}.$$

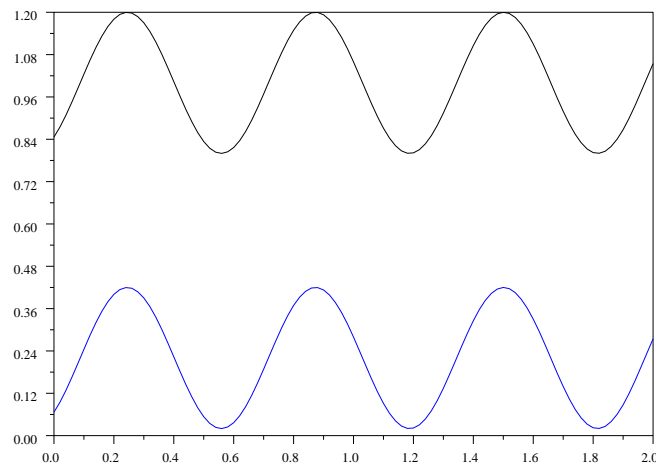
Remarque importante. Les courbes qui sont données ci-dessous, le sont uniquement à titre indicatif, afin de donner un idée du type d'évolution numérique auquel on doit s'attendre dans chaque cas. On ne demande pas de les reproduire exactement.

Calculs effectués avec Scilab. Données : $L = 2$, $M = 100$. Les graphes montrent le résultat du schéma de Lax-Friedrichs pour A (courbe du haut) et q (courbe du bas) à $t = 4,2s$.

(public 2008) Avoir les ondes dans le sang



Cas non linéaire : approximation du système (7), $\Delta t = 0,013$.



Cas linéaire : approximation du système (8), $\Delta t = 0,02$.

Suggestions pour le développement

- *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*
- Identifier les points faibles de cette modélisation.
- Écrire le modèle que l'on obtient si l'on ne néglige plus l'action des forces F_l sur les parois de l'artère.

(public 2008) Avoir les ondes dans le sang

- Donner une solution explicite du système linéaire (8) avec la loi d'état et les données initiales et en entrée de la partie « Étude numérique ».
- Dans ce même système linéaire, poser $z_1 = \alpha + q$ et $z_2 = \alpha - q$. Développer les conséquences que l'on peut tirer de ce changement d'inconnues par exemple sur la forme des solutions, les données initiales et en entrée.
- Tester la linéarisation du §2 à l'aide du schéma numérique en prenant, pour le système non linéaire, des données proches de l'équilibre, par exemple

$$U_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, G(t) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \sin(10t) \\ \varepsilon \sin(10t) \end{pmatrix}$$

avec ε petit. Que peut-on voir sur la vitesse de propagation des ondes et l'évolution de la forme des graphes ?

- Observer ce qui se passe pour le système non linéaire quand, en gardant le même pas d'espace, on augmente le pas de temps à 0,014. Même chose pour le système linéaire pour un pas de temps supérieur à 0,02. Que vaut λ dans ce dernier cas ? Interpréter.
- Effectuer des expériences numériques avec d'autres données initiales ou en entrée (avec prudence). On pourra éventuellement présenter l'évolution en direct sous la forme d'une animation et discuter les phénomènes que l'on voit apparaître en relation avec le modèle et avec le schéma numérique.