

Anses de panier

Ludovic Goudenège

Agrégation 2010

Nous étudions dans cet article un problème d'approximation géométrique : l'approximation d'un quart d'ellipse par la réunion de deux arcs de cercle appelée « anse de panier ». Les arcs en demi-ellipse ont été utilisés dans l'architecture au XV^e et XVI^e siècles et on en trouve de nombreux exemplaires dans les vieux quartiers de nos villes ou dans les châteaux de cette époque. Mais dans les villages de vigneron, chaque ferme comporte un portail surmonté d'un arc en pierre, bâti souvent au cours du XIX^e siècle. Cet arc est réalisé en 5 ou 7 pierres dont chacune est taillée suivant un arc de cercle. Le menuisier qui a construit le portail a dû lui aussi approcher le quart d'ellipse de chaque vantail par des arcs de cercle. Construire des anses de panier était donc un savoir-faire commun aux siècles précédents comme en témoigne l'article de l'Abbé Bossu dans l'Encyclopédie de D'Alembert. Il semble s'être perdu aujourd'hui et n'être plus enseigné dans les écoles d'architecture ou du bâtiment.

Nous nous proposons ici d'étudier la qualité d'approximation d'un quart d'ellipse par deux anses de panier. Pour un mathématicien, parler d'approximation n'a de sens que si l'on peut mesurer la qualité de celle-ci. Il faut donc introduire un critère qui associera au couple $(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ d'un quart d'ellipse et d'une anse de panier un réel positif $\delta(\mathcal{E}, \mathcal{A})$. À partir d'une famille d'anses de panier (\mathcal{A}_t) paramétrée par un paramètre réel t , on pourra déterminer la meilleure approximation au sens de ce critère. C'est-à-dire la valeur t_0 qui minimise $\delta(\mathcal{E}, \mathcal{A}_t)$.

1 Notations

Étant donné un rectangle $OADB$ de côtés $OA = a$ et $OB = b$ ($b < a$), on lui associe l'ellipse \mathcal{E} d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère (Ox, Oy) associé à ce rectangle. Soit M un point de l'ellipse de coordonnées (x, y) . Si on pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et si on appelle foyers de l'ellipse \mathcal{E} les points F et F' de l'axe (Ox) d'abscisses respectivement c et $-c$, alors on a $MF + MF' = 2a$.

Cette propriété élémentaire permet de dessiner facilement une ellipse à l'aide d'une corde enroulée autour de deux poteaux. Pour cela, on positionne deux poteaux aux foyers, on enroule une corde de longueur $\ell = 2a + 2c$ et on trace la courbe obtenue en tournant autour des poteaux en gardant la corde tendue.

De plus, de l'équation $\sqrt{\langle \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MF} \rangle} + \sqrt{\langle \overrightarrow{MF'}, \overrightarrow{MF'} \rangle} = c$, on peut déduire la relation :

$$\frac{\overrightarrow{MF} \cdot d\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'} \cdot d\overrightarrow{MF'}}{MF'}$$

Le vecteur $d\overrightarrow{MF} = d\overrightarrow{MF'}$, porté par la tangente en M à l'ellipse, est normal au vecteur $\frac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \frac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$ qui est porté par la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$. On en déduit une propriété importante des miroirs elliptiques : tous les rayons issus de F' convergent, après réflexion sur \mathcal{E} en F . En acoustique, cette propriété a été utilisée dans certains bâtiments (voûtes en ellipse), par exemple l'abbaye de la Chaise-Dieu ou celle de Saint Martin à Paris pour la confession des lépreux et dans le métro, où l'on peut se parler d'un quai à l'autre en se plaçant aux foyers.

La longueur de l'ellipse est donnée par l'intégrale $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$ dite « elliptique » et dont le calcul ne se ramène pas à des fonctions élémentaires. On peut, en développant le

binôme, obtenir des développements :

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \, d\varphi &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \varphi} \, d\varphi \\ &= 2\pi a \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{1}{3} \left(\frac{c}{a}\right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{1}{5} \left(\frac{c}{a}\right)^5 - \dots \right). \end{aligned}$$

2 Anses de panier - Première approche

Étant donné le rectangle $OADB$, nous appellerons anse de panier $\mathcal{A} = (\gamma, \Gamma)$ associée à ce rectangle, la réunion de deux arcs de cercle $\gamma = AM$ de rayon r et $\Gamma = BM$ de rayon R , tangents en M et normaux respectivement à OA et OB . Nous noterons I le centre de γ situé sur la droite (OA) et J celui de Γ situé sur la droite (OB) .

Les anses de panier ainsi définies ne dépendent que d'un seul paramètre. On choisit le paramètre $\theta = (\overrightarrow{JM}, \overrightarrow{JB})$. Le point I a pour coordonnées $(a - r, 0)$, le point J a pour coordonnées $(0, b - R)$. Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JM}$, les coordonnées du point M sont données par :

$$\begin{cases} x_M = a - r + r \sin \theta = R \sin \theta, \\ y_M = r \cos \theta = b - R + R \cos \theta. \end{cases}$$

Ce système détermine complètement les deux rayons r et R en fonction du paramètre $\theta \in]0, \pi/2[$:

$$r = \frac{a(\cos \theta - 1) + b \sin \theta}{\cos \theta - 1 + \sin \theta} \quad \text{et} \quad R = \frac{a \cos \theta + b(\sin \theta - 1)}{\cos \theta - 1 + \sin \theta}.$$

Si l'on paramètre par $t = \tan \frac{\theta}{2}$, on obtient pour $t \in]0, 1[$:

$$r = a - \frac{a-b}{1-t} \quad \text{et} \quad R = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2t}. \quad (\text{Rayons})$$

Sur cette dernière expression, on remarque que les rayons sont des fonctions décroissantes du paramètre t sur $]0, 1[$ liés par la relation homographique : $2Rr - 2(ar + bR) + a^2 + b^2 = 0$ (il suffit d'appliquer le théorème de Pythagore sur le triangle (OIJ)). La condition $r \geq 0$ équivaut à

$$0 \leq t \leq t_{max} = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad 0 \leq \theta \leq \theta_{max} = 2 \arctan \left(\frac{b}{a} \right). \quad (\text{Intervalle})$$

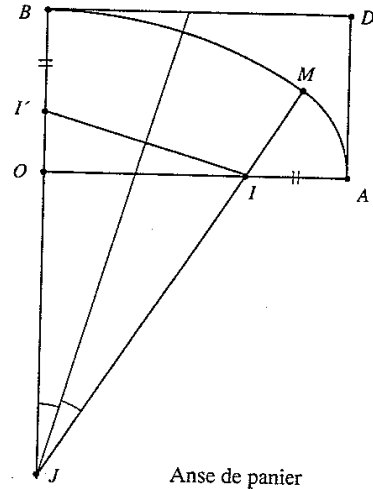
★ Minimiser $\frac{R}{r}$:

On pose $d = \sqrt{a^2 + b^2}$, alors le rapport $\frac{R}{r}$ s'écrit en paramètre θ :

$$\frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{d} \cos \theta + \frac{b}{d} (\sin \theta - 1)}{\frac{a}{d} (\cos \theta - 1) + \frac{b}{d} \sin \theta}.$$

En posant $\theta_0 = \theta_{max}/2 = \arctan \left(\frac{b}{a} \right)$, on peut écrire $\sin \theta_0 = \frac{b}{d}$ et $\cos \theta_0 = \frac{a}{d}$ d'où :

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} &= \frac{\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 (\sin \theta - 1)}{\cos \theta_0 (\cos \theta - 1) + \sin \theta_0 \sin \theta} \\ &= 1 + \frac{\cos \theta_0 - \sin \theta_0}{\cos(\theta - \theta_0) - \cos \theta_0}. \end{aligned}$$



Le rapport $\frac{R}{r}$ est donc une fonction paire de la variable $\theta - \theta_0$ qui passe par un minimum pour $\theta = \theta_0$. En ce minimum, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} t_0 &:= \tan \frac{\theta_0}{2} = \frac{\sin \theta_0}{1 + \cos \theta_0} = \frac{b}{a + d} = \frac{d - a}{b}, \\ r(\theta_0) &= \frac{d(d - a)}{a + b - d}, \\ R(\theta_0) &= \frac{d(d - b)}{a + b - d} \text{ et} \\ \frac{R(\theta_0)}{r(\theta_0)} &= \frac{d - b}{d - a}. \end{aligned}$$

★ **Minimiser $R - r$:**

On a clairement :

$$R - r = \frac{a - b}{\cos \theta - 1 + \sin \theta}.$$

Le dénominateur est maximum pour $\sin \theta = \cos \theta$, ce qui équivaut à $\theta = \frac{\pi}{4}$. On pose donc $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ qui correspond à $t_1 = \arctan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \sim 0,4142\dots$ Remarquons de suite que cette anse de panier minimisante n'existe pas forcément. En effet, (Intervalle) impose $t_1 \leq \frac{b}{a}$ et l'anse minimisante n'existe que si $b \geq (\sqrt{2} - 1)a$.

3 Anses de panier et cercles osculateurs à l'ellipse

On veut étudier les cercles osculateurs à l'ellipse aux points A et B . Ce sont les cercles qui ont un contact d'ordre au moins 2 avec l'ellipse. Cherchons l'équation du cercle osculateur au point B par exemple. Au point B , on peut écrire localement l'équation de l'ellipse \mathcal{E} :

$$y_{\mathcal{E}}(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Pour des raisons de symétrie, le centre du cercle osculateur en B à l'ellipse a son centre sur l'axe (Oy) . On pose $(0, y_{osc})$ les coordonnées du centre du cercle osculateur et R_{osc} son rayon. L'équation du cercle osculateur s'écrit alors localement :

$$y(x) = y_{osc} + \sqrt{R_{osc}^2 - x^2}.$$

Les conditions de contact deviennent alors :

$$\text{Contact d'ordre 0} \iff y_{\mathcal{E}}(0) = y(0) \iff b = y_{osc} + R_{osc},$$

$$\text{Contact d'ordre 1} \iff y'_{\mathcal{E}}(0) = y'(0) \iff 0 = 0,$$

$$\text{Contact d'ordre 2} \iff y''_{\mathcal{E}}(0) = y''(0) \iff -\frac{b}{a^2} = -\frac{1}{R_{osc}},$$

$$\text{Contact d'ordre 3} \iff y_{\mathcal{E}}^{(3)}(0) = y^{(3)}(0) \iff 0 = 0,$$

$$\text{Contact d'ordre 4} \iff y_{\mathcal{E}}^{(4)}(0) = y^{(4)}(0) \iff -\frac{3b}{a^4} = -\frac{3b^3}{a^6}.$$

Jusqu'à l'ordre 3, les conditions peuvent être remplies. Le contact d'ordre 4 n'aurait lieu que si $b = a$. L'ellipse serait alors un cercle, et le cercle osculateur aurait un contact à tout ordre. De la même manière, on peut faire le calcul pour le cercle osculateur en A . Les deux cercles osculateurs

à l'ellipse aux points A et B ont donc pour rayons respectifs $\frac{b^2}{a}$ et $\frac{a^2}{b}$. En B , le cercle osculateur est à l'intérieur de l'ellipse, et en A le cercle osculateur est à l'extérieur de l'ellipse.

On va s'intéresser aux anses de panier dont un des arcs de cercle est justement un arc de cercle d'un cercle osculateur. On note $\mathcal{A}_2 = (\gamma_2, \Gamma_2)$ l'anse de panier telle que γ_2 est le cercle osculateur en A , et on note $\mathcal{A}_3 = (\gamma_3, \Gamma_3)$ l'anse de panier telle que Γ_3 est le cercle osculateur en B . Les paramètres correspondants sont respectivement notés t_2, t_3, θ_2 et θ_3 . Après calcul, en utilisant (Rayons), on trouve : $t_2 = \frac{b}{a+b}$ et $t_3 = \frac{b}{2a+b}$. On peut résumer les différentes situations dans le tableau suivant :

	\mathcal{A}_0	\mathcal{A}_{t_3}	\mathcal{A}_{t_0}	\mathcal{A}_{t_2}	$\mathcal{A}_{b/a}$
t	0	$\frac{b}{2a+b}$	$\frac{d-a}{b} = \frac{b}{a+d}$	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b}{a}$
r	b	$\frac{b(a+b)}{2a}$	$\frac{d(d-a)}{a+b-d}$	$\frac{b^2}{a}$	0
R	$+\infty$	$\frac{a^2}{b}$	$\frac{d(d-b)}{a+b-d}$	$\frac{a(a+b)}{2b}$	$\frac{a^2+b^2}{2b}$

L'anse \mathcal{A}_{t_1} ne peut pas être placée dans le tableau car la valeur de t_1 n'est pas ordonnée par rapport aux autres paramètres t_0, t_2 et t_3 .

4 Approximations au sens des aires et des distances

On va essayer de caractériser la qualité de l'approximation de l'ellipse par une anse de panier. Pour cela, il faut définir une paramètre qui mesure cette qualité d'approximation. On va pour cela considérer deux paramètres : un premier qui quantifie la qualité de l'approximation au sens des aires noté Δ et un deuxième qui quantifie la qualité de l'approximation au sens des distances noté δ .

4.1 Approximation au sens des aires

On déduit de la décroissance simultanée de R et r que deux anses de panier de paramètres t et t' distincts ne se croisent qu'en A et B . De plus, lorsque le paramètre t varie entre t_2 et t_3 , l'anse de panier croise l'ellipse en un seul point (en plus des points A et B). Enfin si $0 \geq t \geq t_3$, l'anse de panier \mathcal{A}_t est extérieure à l'ellipse, et si $t_2 \geq t \geq \frac{b}{a}$ elle lui est intérieure.

Si on note τ un angle parcourant $[0, \pi/2]$, on peut écrire l'anse \mathcal{A}_t sous la forme suivante :

$$\Gamma_t \text{ d'équation paramétrique } \begin{cases} x = R \sin(\tau) \\ y = b - R + R \cos(\tau) \end{cases} \text{ avec } 0 \leq \tau \leq \theta,$$

et

$$\gamma_t \text{ d'équation paramétrique } \begin{cases} x = a - r + r \sin(\tau) \\ y = r \cos(\tau) \end{cases} \text{ avec } \theta \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}.$$

L'intersection de Γ_t et de \mathcal{E} (si elle existe) satisfait :

$$\frac{R^2 \sin^2(\tau)}{a^2} + \frac{(b - R + R \cos(\tau))^2}{b^2} = 1.$$

En multipliant par $a^2 + b^2$ et en remarquant que $\tau = 0$ correspond à une solution particulière (point B) on obtient la forme factorisée :

$$R(\cos(\tau) - 1) (Ra^2 + Rb^2 - 2a^2b - R(a^2 - b^2) \cos(\tau)) = 0.$$

Soit la solution $\cos(\tau) = \frac{Ra^2 + Rb^2 - 2a^2b}{R(a^2 - b^2)}$ pourvu que $\tau \leq \theta$.

On fait de même pour γ_t , et on trouve $\sin(\tau) = \frac{r(a^2 + b^2) - 2ab^2}{r(b^2 - a^2)}$ pourvu que $\tau \geq \theta$.

En fait, on peut trouver la valeur du paramètre t pour laquelle on passe d'une intersection avec Γ_t à une intersection avec γ_t . On note cette valeur t_5 . Pour l'obtenir, il suffit de résoudre

$$\frac{Ra^2 + Rb^2 - 2a^2b}{R(a^2 - b^2)} = \cos(\tau) = \cos(\theta_5) = \frac{1 - t_5^2}{1 + t_5^2},$$

avec

$$R = \frac{a + b}{2} + \frac{a - b}{2t_5}.$$

On obtient un trinôme du troisième degré à résoudre. En factorisant par $(at - b)$ et en utilisant que $t \leq \frac{b}{a}$, on trouve $t_5 = \frac{\sqrt{(a + b)^2 + 4ab} - (a + b)}{2a}$.

1er cas : $t_3 \leq t \leq t_5$

Le point d'intersection noté P est sur Γ_t pour l'angle τ considéré ci-dessus. On pose

$$\Delta = (OPB)_\mathcal{E} - (OPB)_{\Gamma_t} + ((OMP)_{\Gamma_t} + (AOM)_{\gamma_t} - (OAP)_\mathcal{E})$$

avec

$$(OPB)_\mathcal{E} = \frac{ab}{2} \arctan\left(\frac{bR \sin(\tau)}{a(b - R + R \cos(\tau))}\right),$$

$$(OAP)_\mathcal{E} = \frac{ab}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{bR \sin(\tau)}{a(b - R + R \cos(\tau))}\right)\right),$$

$$(OPB)_{\Gamma_t} = \frac{R^2 \tau}{2} - \frac{R(R - b)}{2} \sin(\tau),$$

et

$$(OMP)_{\Gamma_t} = (\widehat{OPM}) + (JPM)_{\Gamma_t} - (\widehat{JPM})$$

avec

$$(\widehat{OPM}) = R(b - R)(\sin(\theta) - \sin(\tau)) + R^2 \sin(\theta - \tau),$$

$$(JPM)_{\Gamma_t} - (\widehat{JPM}) = \frac{R^2}{2}(\theta - \tau - \sin(\theta - \tau))$$

et

$$(AOM)_{\gamma_t} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{r(a - r)}{2} \cos(\theta).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \Delta = & -ab \left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{bR \sin(\tau)}{a(b - R + R \cos(\tau))}\right)\right) + R^2 \left(\frac{\theta}{2} - \tau\right) - R(R - b) \left(\frac{\sin(\theta)}{2} - \sin(\tau)\right) \\ & + r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \frac{r(a - r) \cos(\theta)}{2}. \end{aligned}$$

2ème cas : $t_5 \leq t \leq t_2$ Le point d'intersection (toujours noté P) est sur γ_t pour l'angle τ correspondant. On obtient alors :

$$\Delta = -ab \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \left(\frac{b(a-r+r\sin(\tau))}{ar\cos(\tau)} \right) \right) - R^2 \frac{\theta}{2} + \frac{R(R-b)\sin(\theta)}{2} \\ + r^2 \left(\frac{\pi}{4} - \tau + \frac{\theta}{2} \right) - r(a-r) \left(\frac{\cos(\theta)}{2} - \cos(\tau) \right).$$

4.2 Approximation au sens des distances

On considère une ellipse \mathcal{E} et une anse de panier \mathcal{A}_t . À un point M de \mathcal{E} , on peut associer sa projection orthogonale N sur \mathcal{A}_t . Elle s'obtient en joignant M soit à I , soit à J . À un point M' de \mathcal{A}_t , on peut de même associer sa projection orthogonale N' sur \mathcal{E} . On appellera distance de \mathcal{A}_t à \mathcal{E} la quantité

$$\delta = \sup_{M \in \mathcal{E}, M' \in \mathcal{A}_t} (MN, M'N').$$

On peut montrer que cette borne est atteinte si, et seulement si, les cordes MN et $M'N'$ sont normales à la fois à \mathcal{E} et à \mathcal{A}_t .

Soit $a \cos \phi$ et $b \sin \phi$ les coordonnées de M ; la normale en M passe par I si

$$(a-r-a\cos\phi)a\sin\phi + b^2\sin\phi\cos\phi = 0.$$

D'où les deux solutions $\sin \phi = 0$ et $\cos \phi = \frac{a(a-r)}{a^2-b^2}$.

Donc $IM^2 = \frac{b^2}{b^2-a^2}(r^2-2ar+b^2)$ et $MN = r-IM =: \phi(r)$.

De même JM est normale si $\sin \phi = \frac{b(R-b)}{a^2-b^2}$, soit

$$JM^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}(R^2-2ab+b^2) \text{ et } MN = JM-R =: \psi(R).$$

On obtient finalement $\delta = \max(r-IM, R-JM) = \max(\phi(r), -\psi(R))$.

5 Pistes de réflexions

- Proposer une méthode numérique de calcul de la longueur de l'ellipse.
- Faire des figures des anses \mathcal{A}_{t_0} , \mathcal{A}_{t_1} , \mathcal{A}_{t_2} , \mathcal{A}_{t_3} et \mathcal{A}_{t_4} .
- Rechercher les minimums de Δ pour un jeu de paramètres (a, b) fixe.
- Rechercher les minimums de δ et le paramètre t associé pour un jeu de paramètres (a, b) fixe.
- Comparer les approximations.
- Étendre l'étude à des anses de panier composées de n arcs de cercle ($n \geq 3$).

Bibliographie

- [1] Bulletin de l'APMEP, n°406, pp. 619-623, avis de recherche 50.
- [2] Encyclopédie Méthodique-Textes mathématiques, réédition du bicentenaire, ACL-édition p.82-84.
- [3] Ansés de panier, Paul Louis Hennequin et Bruno Ingrao.