Splines Cubiques

Préparation Agrégation de Mathématiques
Université de Rennes 1
Isabelle Gruais

5 décembre 2017

1 Calcul explicite

Définition 1.1 *Une fonction s est appelée spline cubique si s est polynomiale par morceaux de degré k, de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Une spline est dite cubique si elle est le recollement $\mathcal{C}^2$ de polynômes de degré $k = 3$.*

Theorème 1.2 *Soit $a < b$ et soit $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b$ une subdivision de $[a, b]$ de pas $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \cdots, N$. Pour toute suite $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \cdots, N + 3$, il existe une unique fonction spline cubique g telle que :*

1. *$\forall i \in \{0, \cdots, N - 1\}$, $g|_{[x_i,x_{i+1}]}$ est polynomiale de degré 3,*
2. *$\forall i \in \{0, \cdots, N + 1\}$, $\quad g(x_i) = y_i$,*
3. *$g'(a) = y_{N+2}$, $g'(b) = y_{N+3}$.*

L'ensemble $\mathcal{S}$ des splines cubiques définies par (1)–(3) est un espace vectoriel de dimenson $N + 4$.

De plus, la suite des courbures $g''(x_i) = m_i$, $i = 0, \cdots, N$, est définie par :

$$A \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_N \\ y_{N+1} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_N \\ m_{N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g'(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g'(b) \end{pmatrix} \tag{1}$$

où A et B sont les matrices carrées de coefficients :

$$a_{00} = -\frac{1}{h_0}, \quad a_{01} = \frac{1}{h_0},$$

$$a_{ii} = -\left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right), \quad a_{i,i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}, \quad a_{i,i+1} = \frac{1}{h_i}, \quad i = 1, \cdots, N,$$

$$a_{N+1,N} = \frac{1}{h_N}, \quad a_{N+1,N+1} = -\frac{1}{h_N},$$

$$a_{ij} = 0 \quad si \quad |i-j| > 1.$$

$$b_{00} = \frac{h_0}{3}, \quad b_{01} = \frac{h_0}{6}$$

$$b_{ii} = \frac{1}{3}(h_i + h_{i-1}), \quad b_{i,i-1} = \frac{h_{i-1}}{6}, \quad b_{i,i+1} = \frac{h_i}{6}, \quad i = 1, \cdots, N,$$

$$b_{N+1,N} = \frac{h_N}{6}, \quad b_{N+1,N+1} = \frac{h_N}{3},$$

$$b_{ij} = 0 \quad si \quad |i-j| > 1.$$

Proof. Pour tout $i \in \{0, \cdots, N-1\}$, on note g_i la restriction de g à $[x_i, x_{i+1}]$. par définition, g_i'' est le polynôme de Lagrange qui interpole les valeurs m_i, m_{i+1} aux noeuds x_i, x_{i+1} respectivement, soit

$$g_i''(x) = \frac{(x-x_i)}{h_i}m_{i+1} - \frac{(x-x_{i+1})}{h_i}m_i.$$

On en déduit alors :

$$g_i(x) = \frac{(x-x_i)^3}{6h_i}m_{i+1} - \frac{(x-x_{i+1})^3}{6h_i}m_i + a_i\left(x - \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})\right) + b_i$$

où les constantes a_i, b_i sont solutions de

$$y_i = \frac{h_i^2}{6}m_i - \frac{h_i}{2}a_i + b_i$$

$$y_{i+1} = \frac{h_i^2}{6}m_{i+1} + \frac{h_i}{2}a_i + b_i$$

soit :

$$a_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_{i+1} - m_i),$$

$$b_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} - \frac{h_i^2}{12}(m_i + m_{i+1}).$$

Il reste à écrire que g est de classe $\mathcal{C}^1$, i.e. que $g_i'(x_i) = g_{i-1}'(x_i)$, $i = 1, \cdots N$. Pour cela, on utilise les relations :

$$g_i'(x) = \frac{(x-x_i)^2}{2h_i} m_{i+1} - \frac{(x-x_{i+1})^2}{2h_i} m_i + a_i, \quad \forall i \in \{1, \cdots N\},$$

pour en déduire successivement que :

$$g_i'(x_i) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_{i+1} + 2m_i)$$

$$g_i'(x_{i+1}) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6}(2m_{i+1} + m_i)$$

$$g_{i-1}'(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(2m_i + m_{i-1})$$

ce qui entraîne :

$$\frac{y_{i+1}}{h_i} - \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i-1}}\right) y_i + \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} = \frac{h_i}{6} m_{i+1} + \frac{(h_{i-1}+h_i)}{3} m_i + \frac{h_{i-1}}{6} m_{i-1},$$

i.e. (1) sous forme matricielle. On remarque que B est inversible. En effet, soit $x \in \mathbb{R}^N$. On obtient directement :

$$Bx \cdot x = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{N} h_i (x_i + x_{i+1})^2,$$

d'où on déduit que si $Bx = 0$, alors $x_i + x_{i+1} = 0$, $i = 0, \cdots, N$. Comme de plus $Bx = 0$ entrañe directement :

$$\frac{h_{i-1}}{6}(x_{i-1} + 2x_i) + \frac{h_i}{6}(2x_i + x_{i+1}) = 0, \quad i = 1, \cdots, N$$

il en résulte que

$$(h_{i-1} + h_i) x_i = 0, \quad i = 1, \cdots, N$$

i.e. : $x_0 = x_1 = \cdots = x_N = x_{N+1} = 0$. ■

2 Estimation de l'erreur d'interpolation

On suppose que $h_i = h = \dfrac{b-a}{N+1}$, $i = 0, \cdots, N+1$. Alors

$$a_{00} = a_{N+1,N+1} = -\frac{1}{h}, \quad a_{ii} = -\frac{2}{h}, \quad i = 1, \cdots, N, \quad a_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i-j| > 1$$

$$b_{00} = b_{N+1,N+1} = \frac{h}{3}, \quad b_{ii} = \frac{2h}{3}, \quad i = 1, \cdots, N, \quad b_{ij} = 0 \quad \text{si} \quad |i-j| > 1$$

Theorème 2.1 *Soit $f \in \mathcal{C}^4(a,b)$ et soit g une fonction spline interpolant f aux noeuds $x_i = a + ih(b-a)$, $i = 0, \cdots, N+1$, $h = \dfrac{(b-a)}{N+1}$ et f' aux noeuds $x_0 = a$ et $x_{N+1} = b$. Alors :*

$$\sup_{a \le x \le b} |f^{(p)}(x) - g^{(p)}(x)| \le C h^{4-p} \sup_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| \tag{2}$$

Proof. D'après les propriétés du polynôme d'interpolation de Lagrange, la propriété est vraie pour $p = 2$. On pose :

$$X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \\ x_{N+1} \end{pmatrix}, \quad F(X) = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_N) \\ f(x_{N+1}) \end{pmatrix}, \quad G(X) = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \\ g(x_{N+1}) \end{pmatrix}.$$

D'après la formule de Taylor :

$$AF(X) - BF''(X) - \begin{pmatrix} f'(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f'(b) \end{pmatrix} = \mathcal{O}(h^3) R_4$$

où le vecteur$R_4 \in \mathbb{R}^{N+2}$ vérifie l'estimation uniforme :

$$\|R_4\| \le C \sup_{a \le x \le b} |f^{(4)}(x)| =: C M_4.$$

On remarque que A est inversible. En effet :

$$Ax \cdot x = -\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N} (x_i + x_{i+1})^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N+1} (x_i + x_{i-1})^2$$

de sorte que si $Ax = 0$ alors : $x_i + x_{i+1} = 0$, $i = 0, \cdots, N$. De plus on a directement : $-x_0 + x_1 = -x_{N+1} + x_N = 0$, ce qui entraîne : $x_0 = x_1 = 0$ et $x_N = x_{N+1} = 0$, puis, $x = 0$.

Comme de plus :

$$AG(X) - BG''(X) - \begin{pmatrix} g'(a) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -g'(b) \end{pmatrix} = 0$$

on en déduit :

$$A(F(X) - G(X)) - B(F''(X) - G''(X)) = \mathcal{O}(h^3)R_4,$$

i.e., comme $F(X) - G(X) = 0$ par construction :

$$B(F''(X) - G''(X)) = \mathcal{O}(h^3)R_4.$$

Il en résulte :

$$\|F''(X) - G''(X)\| \leq Ch^3 M_4 \|B^{-1}\| \leq Ch^2 M_4 \tag{3}$$

i.e. (2) avec $p = 2$ en X.
On pose

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Alors

$$\tilde{X} + h = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N+1} \end{pmatrix}$$

De (3) et de la formule de Taylor, on déduit :

$$\|G'''(\tilde{X}) - F'''(\tilde{X})\| = \left\| \frac{1}{h}(G''(\tilde{X}+h) - G''(\tilde{X})) - F'''(\tilde{X}) \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\|G''(\tilde{X}+h) - F''(\tilde{X}+h)\| + \frac{1}{h}\|G''(\tilde{X}) - F''(\tilde{X})\| +$$

$$+ \left\| \frac{1}{h}(F''(\tilde{X}+h) - F''(\tilde{X})) - F'''(\tilde{X}) \right\| \leq ChM_4$$

i.e. :

$$\|G'''(\tilde{X}) - F'''(\tilde{X})\| \leq ChM_4 \tag{4}$$

Comme $G(\tilde{X}) = F(\tilde{X})$ par construction, on a :

$$0 = G'(\tilde{X}) - F'(\tilde{X}) + \frac{h}{2}(G''(\tilde{X}) - F''(\tilde{X})) + \frac{h^2}{6}(G'''(\tilde{X}) - F'''(\tilde{X})) + \mathcal{O}(h^3)R_4$$

donc, compte tenu de (3) et (4) :

$$\|G'(\tilde{X}) - F'(\tilde{X})\| \leq \frac{h}{2}\|G''(\tilde{X}) - F''(\tilde{X})\| + \frac{h^2}{6}\|G'''(\tilde{X}) - F'''(\tilde{X})\| + \mathcal{O}(h^3)M_4 \leq Ch^3M_4. \tag{5}$$

Le même raisonnement avec $\tilde{X}$ et $\tilde{X}+h$ remplacés par $\tilde{X}+h$ et $\tilde{X}$ respectivement permet de conclure que (4) et (5) sont vrais pour X, i.e. :

$$\|G'''(X) - F'''(X)\| \leq ChM_4 \tag{6}$$

$$\|G'(X) - F'(X)\| \leq Ch^3M_4. \tag{7}$$

Soit $x \in [a,b]$ et soit i t.q. : $x_i \leq x \leq x_{i+1}$. De la formule fondamentale du calcul intégral :

$$f'''(x) - g'''(x) = f'''(x_i) - g'''(x_i) + \int_{x_i}^{x} (-f^{(4)}(y))dy$$

donc :

$$|f'''(x) - g'''(x)| \leq |f'''(x_i) - g'''(x_i)| + hM_4 \leq ChM_4.$$

De plus,

$$f''(x) - g''(x) = f''(x_i) - g''(x_i) + \int_{x_i}^{x} (g'''(y) - f'''(y))dy$$

donc :

$$|f''(x) - g''(x)| \leq |f''(x_i) - g''(x_i)| + \int_{x_i}^{x} |g'''(y) - f'''(y)|dy \leq Ch^2M_4.$$

Par le même raisonnement :

$$|f'(x) - g'(x)| \leq Ch^3M_4$$

$$|f(x) - g(x)| \leq Ch^4M_4$$

∎

3 Variantes

Les conditions au bord de type Hermite $g'(a) = f'(a)$, $g'(b) = f'(b)$ peuvent être remplacées par les conditions au bord dites naturelles $g''(a) =$

$g''(b) = 0$ ou périodiques $g'(a) = g'(b)$, $g''(a) = g''(b)$.

Elles sont compatibles avec le problème de minimisation de l'énergie :

$$\min_{g \in \mathcal{S}} \int_a^b |f''(x) - g''(x)|^2 \, dx$$

sous la forme générale :

$$g''(a)(f'(a) - g'(a)) = g''(b)(f'(b) - g'(b)).$$

En effet, la condition de minimisation s'écrit encore :

$$\int_a^b |f''(x)|^2 \, dx = \int_a^b |f''(x) - g''(x)|^2 \, dx + \int_a^b |g''(x)|^2 \, dx$$

ce qui est équivalent à

$$2 \int_a^b (f''(x) - g''(x)) g''(x) \, dx = 0.$$

Références

[1] J. Stoer, R. Bulirsch. Introduction to Numerical Analysis, Springer, New-York, 2002.