in F. Filbet, Analyse numérique, Dunod 2009

et en posant $\sigma = \cos(k\Delta x)$, $\sigma \in [-1, 1]$, il vient

$$\begin{aligned} |b_{\mathrm{LW}}(k)|^2 &= |1 - \lambda^2(1-\sigma)|^2 + \lambda^2(1-\sigma^2) \\ &= 1 + \lambda^4 + \lambda^2\sigma^2 - 2\lambda^2 + 2\lambda^2\sigma + \lambda^2 - \lambda^2\sigma^2, \\ &= 1 - \lambda^2(1-\lambda^2) + 2\lambda^2(1-\lambda^2)\sigma - \lambda^2\sigma^2(1-\lambda^2), \\ &= 1 - \lambda^2(1-\lambda^2)[1-\sigma]^2. \end{aligned}$$

Ainsi, sous la condition CFL, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, et puisque $\sigma \in [-1, 1]$, nous obtenons le résultat $b_{\mathrm{LW}}(k) \leqslant 1$. □

7.5 Problème résolu : l'équation des ondes

7.5.1 Comment une onde se propage-t-elle ?

Dans cette partie, nous appliquons la loi de Newton à une corde élastique, et montrons que les vibrations transversales de petite amplitude obéissent à l'équation des ondes.

Considérons au temps $t \geqslant 0$, une section caractéristique de la corde $[x, x+\delta x]$ où x désigne la position sur l'axe des abscisses et notons $u(t,x)$ le déplacement vertical de la corde, $\theta(t,x)$ l'angle entre la corde et l'axe horizontal à la position x, $T(t,x)$ la tension de la corde et enfin $\rho(x)$ désigne la densité de masse de la corde au point x.

Tout d'abord, il nous faut recenser les forces agissant sur la section de la corde au temps t, nous avons :

- une tension tirant vers la droite de magnitude $T(t, x+\delta x)$ et agissant avec un angle $\theta(t, x+\delta x)$ avec l'horizontale vers le haut ;
- une tension tirant vers la gauche de magnitude $T(t,x)$ et agissant avec un angle $\theta(t,x)$ avec l'horizontale vers le bas ;
- diverses forces externes, comme la pesanteur. Supposons pour simplifier que toutes ces forces agissent verticalement et notons par $f(t,x)\,\delta x$ l'amplitude de cette force agissant sur l'élément de la corde.

La masse de la section de la corde est donnée par $\rho(x)\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2}$ de sorte que l'équation de la composante verticale décrivant la loi de Newton s'écrit

$$\begin{aligned} \rho(x)\sqrt{\delta x^2 + \delta u^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) &= T(t, x+\delta x)\,\sin(\theta(t, x+\delta x)) \\ &- T(t,x)\,\sin(\theta(t,x)) + f(t,x)\,\delta x. \end{aligned}$$

En divisant par δx et en passant à la limite $\delta x \to 0$, il vient alors

$$\rho(x)\sqrt{1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}\;\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(T(t,x)\,\sin(\theta(t,x))\right) + f(t,x). \qquad (7.50)$$

En observant simplement la Figure 7.6, nous sommes en mesure de lier les inconnues θ et u

$$\tan(\theta(t,x)) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x),$$

ce qui implique

$$\sin(\theta) = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}, \qquad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$$

et

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

En supposant de plus que les vibrations de la corde sont très petites, c'est-à-dire $|\theta(t,x)| \ll 1$ pour tout t et x, nous avons alors $\tan(\theta(t,x)) \ll 1$ et

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \simeq 1, \quad \sin(\theta) \simeq \frac{\partial u}{\partial x} \quad \cos(\theta) \simeq 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

En substituant alors ces quantité dans (7.50), il vient

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial T}{\partial x}(t,x)\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + T(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x),$$

qui est une équation relativement simple mais possède un problème : il y a une équation pour deux inconnues u et T.

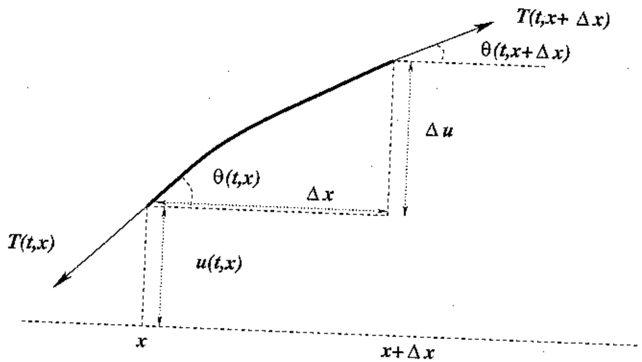

Figure 7.6
Illustration de la modélisation d'une onde.

Nous utilisons alors l'équation sur la composante horizontale décrivant la loi de Newton et en supposant qu'il y a seulement des vibrations transverses, c'est-à-dire que la corde se déplace seulement de manière verticale, les forces horizontales étant nulles et nous obtenons

$$T(t, x+\delta x)\cos(\theta(t, x+\delta x) - T(t,x)\cos(\theta(t,x) = 0.$$

En divisant par δx et en passant à la limite $\delta x \to 0$, cela donne simplement

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T(t,x)\cos(\theta(t,x))\right) = 0,$$

c'est-à-dire que $T(t,x)\cos(\theta(t,x))$ est indépendant de x et en rappelant l'hypothèse de petites vibrations, cela signifie que $T(t,x)$ ne dépend pas de x, l'équation devient alors

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = T(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x).$$

Lorsque la densité de masse ρ est constante par rapport à x, la tension de la corde est indépendante du temps et en négligeant les forces extérieures, l'équation s'écrit plus simplement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),$$

avec $c = \sqrt{T/\rho}$.

Cette équation du deuxième ordre peut aussi être écrite comme un système de deux « lois de conservation » du premier ordre. On introduit pour cela les quantités (v, w) telles que

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{\partial u}{\partial t} \in \mathbb{R}, \\[2ex] u_2 = c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous obtenons alors deux équations pour le vecteur à deux dimensions :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - c\,\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - c\,\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{7.51}$$

Cette formulation est intéressante quand on considère l'énergie du système. On rappelle que l'énergie des solutions de l'équation des ondes est

$$\begin{aligned} E(t,x) &= \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2 + c^2\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right], \\ &= \frac{1}{2}\left[|u_1|^2 + |u_2|^2\right]. \end{aligned}$$

Retrouvons cela en termes du système (7.51). En multipliant la première équation par u_1, la seconde par u_2, nous obtenons en additionnant

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[u_1^2 + |u_2|^2] - c\,\frac{\partial u_1 u_2}{\partial x} = 0.$$

En intégrant l'équation ci-dessus et en utilisant une intégration par partie, nous obtenons pour les solutions qui tendent vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini (en fait L^2 suffit),

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} [u_1^2(t) + |u_2(t)|^2]\,dx = \int_{\mathbb{R}} [u_1^2(0) + |u_2(0)|^2]\,dx, \quad t \geqslant 0, \\[2ex] u_2(0) = c\,\frac{\partial u_0}{\partial x}. \end{cases}$$

Pour les systèmes du premier ordre non linéaires une telle « loi de conservation » supplémentaire est appelée entropie. Ce concept joue un rôle important dans la théorie et pour les méthodes numériques.

7.5.2 Discrétisation de l'équation des ondes

Comme la corde est fixée à ses deux extrémités, nous pouvons facilement donner des conditions aux limites pour accompagner l'équation des ondes. En outre, nous fixons une position initiale $u(0,x)$ et une vitesse initiale $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)$. Ainsi, le problème aux limites s'écrit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times\,]a,b[, \\[2ex] u(t,a) = u(t,b) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \\[2ex] u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x), \quad x \in\,]a,b[. \end{cases} \tag{7.52}$$

La constante c qui apparaît dans cette équation désigne la vitesse de propagation de l'onde dans cette corde. Cette vitesse est déterminée par $c^2 = T/\rho$, où T désigne la tension et ρ la masse linéique de la corde.

Ayant fixé comme précédemment un pas $\Delta x = (b-a)/(n_x+1)$ et choisi les points $x_i = a + i\Delta x$ du segment $[a,b]$, nous recherchons $v_i(t)$ une approximation de $u(t,x_i)$. D'après les conditions aux limites, nous posons $v_0(t) = v_{n_x+1}(t) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Puis $v(t) = (v_1, \ldots, v_{n_x}(t))$ est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 v(t)}{dt^2} + \dfrac{c^2}{\Delta x^2}A\,v(t) = 0, \quad t > 0, \\[2ex] v(0) = u_0, \quad \dfrac{dv(0)}{} = u_1 \end{cases} \tag{7.53}$$