in Laurent DUMAS, Modélisation à l'oral de l'agreg, Ellipses 1999

I. MÉCANIQUE : LE PENDULE PESANT

L'objectif de cette leçon applicative est de découvrir à travers l'exemple du pendule pesant les principales problématiques des systèmes dynamiques. Après l'énoncé dans le paragraphe 1 des problèmes désirant être résolus, la modélisation mathématique de ceux-ci est réalisée au paragraphe 2. Une série de résultats numériques qualitatifs est ensuite proposée au paragraphe 3. Enfin, la justification des observations effectuées est entreprise aux paragraphes 4 (étude complète de trajectoires) et 5 (étude des points d'équilibre).

1. Problématique

1.1 Problème 1 : pendule non amorti

Soit M un point matériel de masse m situé à l'extrémité d'un fil de longueur l fixé en O, pouvant se déplacer dans un plan vertical où il est soumis à la force gravitationnelle $\vec{g}$. On repère M en fonction du temps par la mesure d'angle suivante : $x(t) = (\overrightarrow{g}, \overrightarrow{OM(t)})$.

`Question 1` : déterminer les positions d'équilibre du pendule non amorti et étudier son comportement près de ces positions.

`Question 2` : étudier précisément en fonction de la vitesse angulaire initiale $x'_0 = \dfrac{dx}{dt}(0) \geq 0$, la trajectoire du pendule non amorti partant de $x(0) = 0$.

1.2 Problème 2 : pendule amorti

On suppose à présent que le pendule subit au cours de son déplacement un frottement proportionnel à sa vitesse.

`Question 3` : déterminer les positions d'équilibre du pendule amorti et étudier son comportement près de ces positions.

`Question 4` : décrire qualitativement les différentes trajectoires possibles du pendule amorti partant de $x(0) = 0$.

1.3 Problème 3 : pendule amorti entretenu

Au pendule précédent on fournit un peu d'énergie lors de chaque passage par la position $x = 0$.

`Question 5` : proposer un modèle de pendule amorti entretenu.

`Question 6` : décrire qualitativement la trajectoire du pendule amorti entretenu près de la position $x = 0$ en fonction de l'intensité de l'énergie apportée.

2. Modélisation mathématique

2.1 Problème 1 : pendule non amorti

Le mouvement du point M avec les notations et hypothèses du problème 1 est régi par la relation fondamentale de la dynamique pouvant s'écrire dans le repère local de Frénet :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = -\omega^2 \sin x(t) \quad (t \geq 0), \\ (x, \dfrac{dx}{dt})(0) = (0, x'_0) \end{cases}$$

où on a noté $\omega^2 = \dfrac{||\vec{g}||}{l}$. On remarque que cette équation peut se récrire sous la forme d'un système du premier ordre, dit Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y = \dfrac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x = -\dfrac{\partial H}{\partial x}(x, y), \\ (x, y)(0) = (0, x'_0), \end{cases} \tag{1}$$

avec

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2(1 - \cos x). \tag{2}$$

La fonction H s'appelle le Hamiltonien du système et peut être assimilée à son énergie totale (cinétique plus potentielle). On vérifie aisément que cette quantité est conservée au cours du mouvement.

2.2 Problème 2 : pendule amorti

En conservant les notations précédentes et en supposant l'amortissement du pendule proportionnel à la vitesse angulaire (constante de proportionnalité $\rho > 0$), on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \rho y, \\ (x, y)(0) = (0, x'_0). \end{cases} \tag{3}$$

Ce système est dissipatif car la valeur du Hamiltonien H est à présent décroissante au cours du temps ($\dfrac{d}{dt}H(x, y) = -\rho y^2$).

2.3 Problème 3 : pendule amorti entretenu

On propose (voir [EU]) le modèle de pendule amorti entretenu suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - (x^2 - \mu)y \end{cases} \tag{4}$$

où μ est un paramètre positif.

On peut remarquer que ce modèle est très proche de la célèbre équation de Van der Pol intervenant dans la théorie des instruments à archets :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

3. Simulations numériques

3.1 Problème 1 : pendule non amorti

La première idée naturelle consiste à utiliser Maple afin de déterminer d'éventuelles solution explicites du système (1) (avec $\omega^2 = 1$ et $x'_0 = 1$ par exemple). En exécutant la ligne suivante :

```
>Eq :=(diff(x(t),t,t)=-sin(x(t)) :dsolve(Eq,x(0)=0,D(x)(0)=1,x(t)) ;
```

il apparait le message :

```
Erros (in solve/sumint)
cannot solve for variables used in unevaluated sums/int
```

Seule une résolution approchée du système (1) est donc réalisable : le script Scilab suivant permet de simuler numériquement celui-ci pour toute valeur initiale x'_0 rentrée par l'utilisateur et toujours avec $\omega^2 = 1$:

```
deff('[yy]=f(t,y)',['yy(1)=y(2)','yy(2)=-sin(y(1))'])
write(%io(2),'vitesse initiale')
x0=read(%io(1),1,1) ;
y0=[0,x0]' ;t0=0 ;t=0 :0.1 :15 ;
[yr1]=ode(y0,t0,t,f) ;
plot2d(t,yr1(1, :))
```

On a tracé sur les Figures 1a à 1d la fonction $t \mapsto x(t)$ sur l'intervalle $[0, 20]$ pour des valeurs initiales respectivement égales à 1, 1.9, 2.1 et 3. Deux types de comportement qualitatif sont observés : pour les deux premières valeurs, le pendule oscille autour de la position verticale inférieure ($x = 0$). La demi période de ses oscillations peut être déterminée approximativement en calculant l'intervalle de temps entre deux zéros consécutifs de x. Pour les deux autres valeurs initiales, le pendule effectue des tours complets en retrouvant la même vitesse à chaque passage (suivant le principe de conservation de l'énergie).

La série des Figures 2a à 2d présente les résultats des mêmes calculs sous forme paramétrique dans l'espace des phases $S^1 \times \mathbf{R}$ du système (courbes $(\cos x(t), \sin x(t), y(t))$). Chacune de ces courbes (appelées courbes intégrales ou orbites du système dynamique) est fermée et n'en rencontre aucune autre grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz.

Dans la série des Figures 3a à 3d sont représentées deux vues du Hamiltonien H et les résultats des calculs précédents à nouveau sous forme de courbes paramétrées $(x(t), y(t))$. Comme le Hamiltonien est conservé au cours du mouvement, celles-ci correspondent à des courbes de niveau de la surface tracée $(x, y) \mapsto H(x, y)$.