onc les poids $\tilde{w}_i$ coïncident aussi avec les w_i. ■

Finalement, voyons que les w_i sont positifs.

'roposition 1.2.5

Dans la situation ci-dessus, tous les poids w_i sont strictement positifs.

'émonstration : Le polynôyme $Q_j^2(x)$ est de degré $2k-2$, la règle gaussienne ntègre donc exactement. Ceci donne

$$0 < \int_a^b Q_j^2(x)w(x)dx = \sum_i w_i Q_j^2(x_i) = w_j.$$

■

emarque 1.2.6 Contrairement aux méthodes de Newton-Cotes générales, la ositivité des poids permet d'utiliser des méthodes gaussiennes de degré élevé.

In Hubert-Hubbard, Calcul Scientifique, Vuibert 2006

Chapitre 2

Equations différentielles ordinaires

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une équation différentielle ordinaire de degré 1 dans $\mathbb{R}^n$ est une équation de la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{2.1}$$

où $\mathbf{f}$ est une application de $I \times U \to \mathbb{R}^n$. Nous supposerons $\mathbf{f}$ une fonction localement lipschitzienne.

Une solution de l'équation différentielle (2.1) est un couple $(J, \mathbf{x})$ où J est un sous-intervalle ouvert de I et $\mathbf{x} : J \to U$ est une application de classe C^1 telle que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ pour tout $t \in J$. Nous rappellerons dans ce chapitre que la donnée de $\mathbf{x}$ à un instant t_0 détermine entièrement la solution. Nous renvoyons le lecteur aux livres [Arn74, CL55, HSD04, HW99, PM80] pour une étude plus détaillée de la théorie des équations différentielles. Nous étudierons également quelques méthodes d'approximation de ces équations. Le lecteur pourra consulter les livres de [CM89, Dem91, HNW00, HW04, HW99, Sch91] pour la discrétisation de ces équations.

2.1 Exemples de modélisation de problèmes physiques par des équations différentielles ordinaires

2.1.1 Les circuits électriques

La modélisation des circuits électriques forme une riche source d'équations différentielles. Un ordinateur contient des transistors, qui sont des éléments non-linéaires ; l'étude des circuits contenant des éléments non linéaires est infiniment plus délicate que celle ne contenant que des éléments linéaires : des condensateurs (capacités), des bobines (inductances) et des résistances, auxquels il faut ajouter des générateurs si on veut que le circuit soit alimenté en courant.

La modélisation des circuits linéaires est facile : lorsque le circuit est *normal* (voir paragraphe 2.1.1.4) nous allons donner un algorithme pour écrire un système d'équations différentielles dont les variables sont les tensions dans les condensateurs et les courants dans les bobines ; quand un circuit n'est pas *normal* il faut un peu de soin pour choisir les « bonnes » variables mais il n'y a pas de difficultés sérieuses.

2.1.1.1 Graphes et circuits

Un élément d'un circuit est une boîte dont il sort deux fils, marqués respectivement + et −, qui s'appellent les *bornes* de l'élément. Lorsque l'élément fonctionne, il y passe un courant i et il existe une tension v entre les bornes. La description de l'élément consiste à écrire les relations (algébriques ou différentielles, linéaires ou éventuellement non-linéaires) entre i et v.

Un circuit est donc décrit par un graphe Γ, dont chaque arête contient un élément. On choisit un sens positif pour chaque courant dans une arête (flèche orientée dans le sens positif du courant dans l'arête). Les orientations sur les arêtes peuvent être choisies de façon indépendante. Conventionnellement pour la tension on choisit l'orientation inverse.

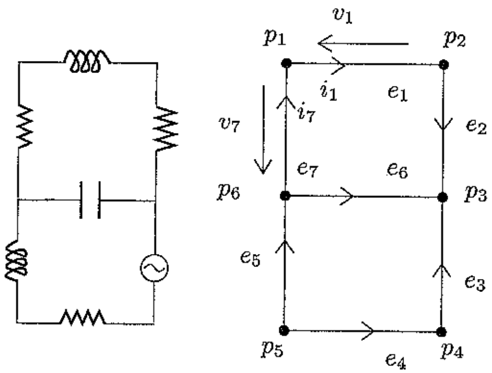


FIG. 2.1 : Un circuit et son graphe sous-jacent

La figure 2.1 donne un exemple de circuit et son graphe sous-jacent. Le graphe a des arêtes $e_1, \cdots, e_7$ et des sommets $p_1, \cdots, p_6$. Les arêtes correspondent à sept éléments : deux bobines (e_1 et e_5), trois résistances (e_2, e_4, et e_7), un condensateur (e_6), et un générateur (e_3).

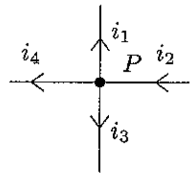
Les premières équations décrivant les circuits électriques sont les *lois de Kirchhoff* :

- **La loi des noeuds**
  En un sommet de Γ où arrivent les arêtes $e_1, \ldots, e_m$ et d'où sortent les arêtes $e_{m+1}, \ldots, e_n$, on a

$$(i_1 + \cdots + i_m) - (i_{m+1} + \cdots + i_n) = 0.$$

Exemple :
Au point P, la loi des noeuds s'écrit :

$$i_2 - (i_1 + i_3 + i_4) = 0.$$



- **La loi des mailles**
  Pour toute courbe fermée orientée de Γ formée des arêtes $e_1, \ldots, e_m$ allant dans le sens de la courbe et des arêtes $e_{m+1}, \ldots, e_n$ allant dans le sens contraire de la courbe, on a

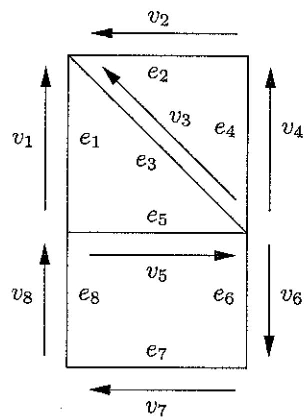
$$v_1 + \cdots + v_m - (v_{m+1} + \cdots + v_n) = 0.$$

Exemples :
Dans la maille (e_1, e_2, e_4, e_6, e_7, e_8) la loi des mailles s'écrit :

$$v_1 + v_6 + v_7 + v_8 - (v_2 + v_4) = 0.$$

Dans la maille (e_1, e_3, e_5) la loi des mailles s'écrit :

$$v_1 - (v_3 + v_5) = 0.$$



Ces lois sont assez faciles à déduire des lois de Maxwell. La première dit qu'on ne peut pas stocker des électrons dans un fil électrique ; ce n'est pas tout à fait vrai, mais la répulsion électrostatique entre charges même infimes est immense, et les phénomènes électrostatiques concernent des charges minuscules par rapport aux charges qui circulent dans les circuits. La seconde dit que les tensions aux bornes découlent d'un potentiel électrique global. Les lois de Maxwell disent que ceci se produit lorsque le champ magnétique est constant. Ce n'est donc qu'approximativement vrai. On s'en aperçoit quand on passe en voiture sous des lignes à haute tension et que la radio cesse de fonctionner.

Soit E l'ensemble des arêtes de Γ, et S l'ensemble des sommets.

Ces deux lois imposent bien sûr des contraintes sur les vecteurs $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^E$ et $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^E$ qui peuvent apparaître dans la description d'un circuit. Le théorème de Tellegen (voir [Tel52]) dit exactement quelles sont ces contraintes.

Théorème 2.1.1 (Tellegen)

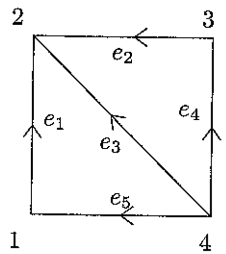
Soit Γ un graphe orienté. Il existe alors des sous espaces I, V inclus dans $\mathbb{R}^E$ qui sont supplémentaires orthogonaux l'un de l'autre pour le produit scalaire évident $\langle \mathbf{i}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{e\in E} i_e v_e$ tels que des courants $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^E$ et des tensions $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^E$ satisfont aux lois de Kirchhoff si et seulement si $\mathbf{i} \in I$ et $\mathbf{v} \in V$.

L'énoncé de l'exercice suivant indique les grandes étapes de la démonstration de ce théorème.

Exercice 2.1

1. Montrer que pour n'importe quelle matrice $A : \mathbb{R}^{n\times m}$, son noyau $\ker A$ est l'orthogonal de l'image de la transposée $A^\top$.
   Soit A la matrice d'incidence du circuit, c'est-à-dire la matrice $\mathbb{R}^{E\times S}$ qui associe à chaque arête e (soit chaque vecteur de base)
   $$A(e) = \text{extrémité de } e \quad - \quad \text{origine de } e.$$
2. Vérifier qu'un vecteur $\mathbf{i} \in \mathbb{R}^E$ appartient au noyau de A s'il obéit à la loi des noeuds, et que l'image de la transposée est l'ensemble des $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^E$ obéissant à la loi des mailles.
3. En déduire le théorème 2.1.1.
4. On considère le circuit électrique suivant. Vérifier que la matrice A d'incidence associée est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



Vérifier qu'écrire que $i = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)^t$ appartient au noyau de A, équivaut à écrire la loi des noeuds aux quatre sommets du circuit avec i_j intensité du courant dans l'arête e_j. Vérifier qu'écrire que $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)^t$ appartient à l'image de $A^\top$, équivaut à écrire la loi des mailles dans chacune des mailles du circuit.

Ceci nous dit donc qu'après prise en compte des lois de Kirchhoff, il nous faut encore exactement une variable libre par élément pour décrire tous les courants et tensions d'un circuit.

Le produit scalaire a une signification physique importante : c'est la puissance du circuit.

2.1.1.2 Les éléments d'un circuit

Avant de présenter les équations décrivant les éléments d'un circuit électrique, nous allons tâcher d'en donner une description intuitive. On va imaginer que notre circuit est un système de tuyaux remplis d'un fluide incompressible, sans masse (donc sans quantité de mouvement) et sans viscosité. Chaque tuyau a un courant et une tension : le courant mesure la quantité de fluide passant dans le tuyau par unité de temps, alors que la tension mesure la différence de pression entre les extrémités. Les lois de Kirchhoff sont satisfaites par ce modèle : la loi des noeuds est exactement l'incompressibilité du fluide. La loi des mailles provient de l'existence d'une fonction pression : la somme des chutes de pressions autour d'une courbe fermée est donc nulle.

Une **bobine** correspond alors à une roue à aubes, connectée à un volant d'inertie. Une bobine sert à donner de la quantité de mouvement à un courant électrique : il faut de l'énergie pour imprimer une rotation au volant, mais une fois en marche il faut de l'énergie pour le ralentir. L'inductance de la bobine correspond au moment d'inertie du volant.

Un **condensateur** correspond à un piston dans un tuyau, tenu par un ressort. Si la pression du tuyau est constante, le piston est à l'arrêt, et il ne passe aucun courant dans le tuyau. Bien qu'aucun fluide n'entre par un bout du tuyau pour ressortir à l'autre bout, quand le piston bouge, cela crée un courant apparent : il y a du fluide qui entre à un bout, et du fluide qui sort à l'autre bout. La capacité du condensateur mesure combien de pression il faut pour déplacer le piston d'une distance unité.

Les bobines et les condensateurs stockent de l'énergie, mais comme l'énergie stockée par une bobine correspond à de la quantité de mouvement, il faut y penser comme de l'énergie cinétique, alors que l'énergie stockée par un condensateur est comme de l'énergie stockée dans un ressort, c'est de l'énergie potentielle.

Une **résistance** est comme un obstacle poreux dans un tuyau, la quantité de fluide traversant l'obstacle est alors proportionnelle à la tension dans le tuyau. Un exemple que nous connaissons tous est le filament d'une ampoule électrique : les électrons « frottent » contre la matière du filament, dissipant de l'énergie qu'on retrouve comme chaleur et comme lumière.

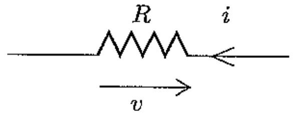
Il nous faut aussi des **générateurs**, qui seront de deux sortes : des générateurs de courant et des générateurs de tension. Ce sont des éléments où soit le courant $i(t)$, soit la tension aux bornes $v(t)$ sont imposés. Les générateurs de courant sont utilisés dans tous les laboratoires, mais dans la vie courante on a plutôt tendance à rencontrer des générateurs de tension, par exemple des piles de 1.5, 9 ou 12 volts, ou encore la tension du secteur fournie par la compagnie d'électricité qui en Europe est caractérisée par $v(t) = 220\cos 100\pi t$ et aux USA par $v(t) = 110\cos 120\pi t$.

2.1.1.3 Les lois constitutives

Passons aux équations décrivant ces éléments. Nous ferons ceci de façon formelle, sans essayer de les justifier. La loi d'Ohm est proche de notre intuition, mais difficile à justifier. Il est en revanche assez facile de voir qu'une bobine (une vraie bobine physique, telle qu'on en voit dans tous les moteurs électriques) en première approximation obéit à la loi des inductances, et que quand deux plaques conductrices sont séparées par un isolant, le courant et la tension aux bornes satisfait (en première approximation toujours) à l'équation des capacités.

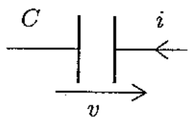
- **La loi d'Ohm**
  Une résistance est caractérisée par sa résistance R, mesurée en *Ohms* (abrégé Ω), et le courant i et tension v dans la résistance satisfont à l'équation

$$v = Ri.$$



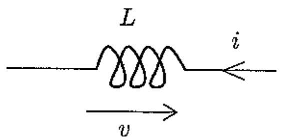
- **La loi des condensateurs**
  Un condensateur est caractérisé par un nombre, appelé sa capacité C mesurée en *Faraday* (abrégé F). Le courant i et la tension v dans le condensateur satisfont à l'équation

$$C\frac{dv}{dt} = i.$$



- **La loi des inductances**
  Une bobine est caractérisée par un nombre L, appelé son inductance et mesuré en *Henry* (abrégé H). Le courant i et la tension v dans la bobine satisfont à l'équation

$$L\frac{di}{dt} = v.$$



On se convaincra facilement qu'en unités S. I. ou MKSA (mètre, kilo, seconde, Ampère),

$$\begin{aligned} 1\,\Omega &= \frac{1\text{ V}}{1\text{ A}} = 1\frac{Kg\,m^2}{s^3\text{ A}^2} \\ 1\text{ F} &= 1\frac{s}{\Omega} \\ 1\text{ H} &= 1\Omega s. \end{aligned}$$

2.1.1.4 La mise en équation d'un circuit

Nous avons vu que les lois de Kirchhoff nous permettent de décrire un circuit électrique à l'aide d'une variable par élément. La loi d'Ohm nous donne une équation supplémentaire par résistance, donc il suffit d'une variable par bobine, condensateur et générateur.

On s'intéressera au cas (très commun) où les courants dans les bobines et les générateurs de courant, les tensions dans les condensateurs et les générateurs de potentiel forment un système complet de variables. On appellera un tel circuit *normal* (voir [Sma72]).

Les équations de Kirchhoff et de Ohm forment un gros système linéaire de la forme $A(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = 0$, et on pourrait croire qu'il va être bien difficile de reconnaître quand ce système exprime implicitement toutes les variables à l'aide de celles-là. Mais il n'en est rien : il y a une condition nécessaire et suffisante pour qu'un circuit soit normal qui est immédiate à vérifier (voir figures 2.2, 2.3).

Théorème 2.1.2

Un circuit est normal si et seulement si les bobines et générateurs de courant ne séparent pas le circuit en plusieurs morceaux, et s'il n'y a pas de courbes fermées entièrement formées de condensateurs et de générateurs de courant.

Dans un sens, il est facile de voir que les conditions sont suffisantes ; c'est plus délicat de voir qu'elles sont nécessaires.

Ceci nous donne la description qu'on cherchait :

Théorème 2.1.3

L'évolution dans le temps d'un circuit électrique normal est donné par un système d'équations différentielles d'ordre 1, à cœfficients constants, dont les variables sont les courants dans les bobines et les tensions dans les condensateurs.

Voyons quelques exemples.

Exemple 2.1.4 (Le circuit RLC forcé) Prenons le circuit formé d'une bobine d'inductance L, d'un condensateur de capacité C, d'une résistance R et d'un générateur de tension donnant $V(t)$, formant une boucle comme dans la figure 2.2. C'est un circuit normal, on peut donc prendre comme variables le courant $i_1(t) = i(t)$ dans la bobine et la tension $v_3(t) = v(t)$ dans le condensateur pour décrire le circuit.

On obtient les équations

$$Li' \underbrace{=}_{\text{Loi des inductances}} v_1 \underbrace{=}_{\text{Loi de mailles}} V(t) - v_3 - v_2 \underbrace{=}_{\text{Loi d'Ohm}} V(t) - v - Ri$$

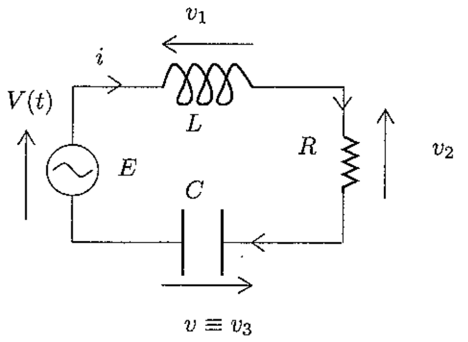


FIG. 2.2 : Un circuit normal avec une bobine (L), une résistance (R), un condensateur (C), et un générateur (E)

$$Cv' \underbrace{\qquad = \qquad}_{\text{Loi des condensateurs}} i_3 \underbrace{\qquad = \qquad}_{\text{loi des noeuds}} i$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V(t)/L \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si on dérive la seconde équation et on la porte dans la première, on trouve

$$Lv'' + Rv' + \frac{v}{C} = \frac{1}{C}V(t);$$

c'est l'équation de l'oscillateur harmonique, amorti et forcé. On voit que l'inductance L joue le rôle de la masse, la résistance R joue le rôle du frottement et la capacité C joue le rôle de la raideur du ressort ; c'est tout à fait en accord avec nos descriptions intuitives des éléments.

Exercice 2.2 Vérifier que le circuit de la figure 2.1 est normal. Combien de variables faut-il pour décrire son comportement ? Trouver de telles variables et les équations qui décrivent leur évolution.

Exercice 2.3 Montrer que le circuit de la figure 2.3 n'est pas normal. Combien de variables faut-il pour décrire le comportement du système ? Choisir de telles variables et écrire les équations du système.

2.1.1.5 L'énergie dans le circuit

Supposons que l'équation différentielle

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

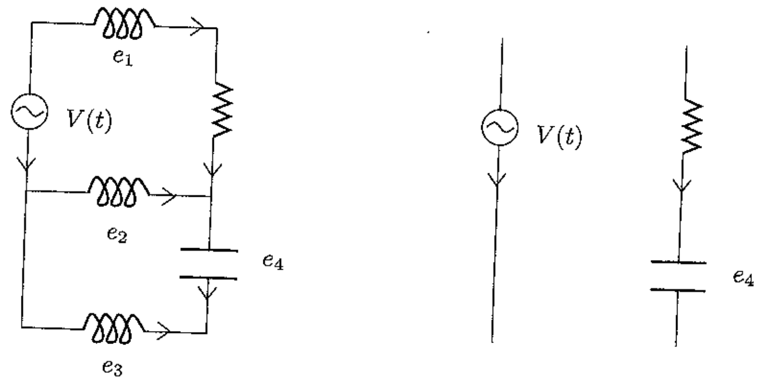


FIG. 2.3 : A gauche : un circuit qui n'est pas normal ; si on enlève les bobines e_1, e_2, et e_3 le circuit n'est pas connexe (figure de droite).

décrit un circuit sans générateurs. Intuitivement, notre analyse va montrer que comme il n'y a pas de source d'énergie, l'énergie totale ne peut que se dissiper dans les résistances.

Définition 2.1.5 (Energie d'un circuit électrique)

L'énergie d'un circuit est stockée dans les bobines et les condensateurs ; elle est donnée par

$$E(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \sum_{\lambda} L_\lambda i_\lambda^2 + \sum_{\gamma} C_\gamma v_\gamma^2,$$

où les indices λ dénotent les bobines et les indices γ dénotent les condensateurs.

Il faut penser au premier terme comme une énergie cinétique, et au second comme une énergie potentielle.

Théorème 2.1.6

1. *Si dans un circuit normal sans générateur, on note $\mathbf{i}(t)$ les courants du circuit et $\mathbf{v}(t)$ ses tensions, alors l'énergie*

$$E(\mathbf{i}, \mathbf{v}) = \sum_{\lambda} L_\lambda i_\lambda^2 + \sum_{\gamma} C_\gamma v_\gamma^2$$

est décroissante : $\frac{d}{dt}E\big(\mathbf{i}(t), \mathbf{v}(t)\big) \leq 0.$

2. Si un circuit normal s'écrit sous la forme $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, toutes les solutions du système sont bornées, et les parties réelles des valeurs propres de A sont négatives ou nulles, les blocs de Jordan associés aux valeurs propres imaginaires pures sont diagonaux.

Démonstration :

1. Puisque le circuit est normal, l'énergie est une forme quadratique définie positive.
   Calculons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(\mathbf{i}(t),\mathbf{v}(t)) &= \frac{d}{dt}\Big(\sum_\lambda L_\lambda i_\lambda(t)^2 + \sum_\gamma C_\gamma v_\gamma(t)^2\Big)\\ &= 2\sum_\lambda L_\lambda i_\lambda(t)\frac{d}{dt}\Big(i_\lambda(t)\Big) + 2\sum_\gamma C_\gamma v_\gamma(t)\frac{d}{dt}\Big(v_\gamma(t)\Big)\\ &= 2\sum_\lambda i_\lambda(t)\, v_\lambda(t) + 2\sum i_\gamma(t) v_\gamma(t)\\ &= -2\sum_\rho i_\rho(t)\, v_\rho(t)\\ &= -2\sum_\rho R_\rho i_\rho^2,\end{aligned}$$

   où l'indice ρ décrit les résistances. L'avant dernière égalité suit du théorème de Tellegen :

$$\sum_\lambda i_\lambda(t)\, v_\lambda(t) + \sum_\gamma i_\gamma(t)\, v_\gamma(t) + \sum_\rho i_\rho(t)\, v_\rho(t) = 0.$$

2. Ceci suit du théorème 2.4.14 démontré au paragraphe 2.4.3.

■

On remarquera que même s'il y a des résistances, certaines valeurs propres peuvent être purement imaginaires.

Exercice 2.4 Trouver un circuit comportant des résistances et une solution périodique non-nulle de l'équation différentielle qui le décrit.

2.1.2 Le système de van Der Pol

Ce modèle sert dans de nombreuses situations physiques, mécaniques, optiques (laser) ou électronique pour décrire des systèmes oscillants dont les caractéristiques

sont essentiellement données par des termes de saturation de gains des amplificateurs.

Nous présentons ici le modèle tel qu'il a été proposé par van der Pol dès 1934 pour un circuit électrique associant une triode oscillante, un transformateur (deux bobines en parallèle), un condensateur, une résistance et un générateur de tension constante (batterie), voir figure 2.4. Nous avons vu au paragraphe précédent les

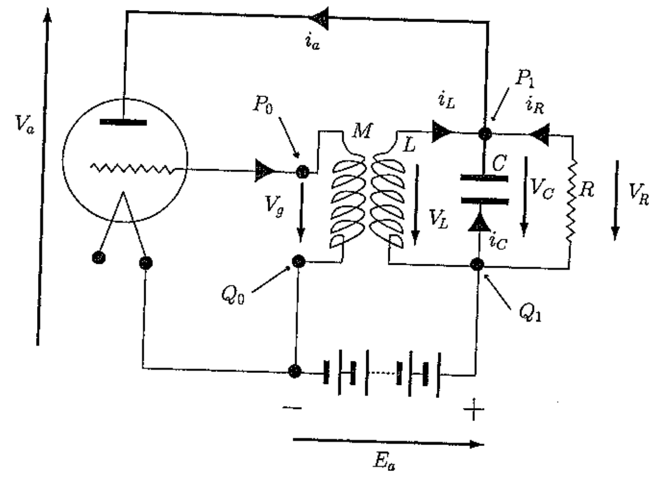


FIG. 2.4 : Le circuit électrique de van Der Pol

caractéristiques des résistances, des bobines et des condensateurs, nous allons ici introduire aussi celles d'un transformateur et celles d'une triode.

Notons E_a, V_a, V_L, V_C, V_R respectivement les tensions aux bornes du générateur, de la triode, de la bobine, du condensateur, de la résistance. La tension V_g entre les points P_0 et Q_0 est appelée potentiel de grille. On note également i_a, i_L, i_C, i_R respectivement le courant qui sort de la triode, le courant qui entre dans la bobine, le courant qui passe dans le condensateur et le courant qui passe dans la résistance.

Ecrivons la loi des nœuds au point P_1 :

$$i_a = i_R + i_C + i_L. \tag{2.2}$$

La loi des mailles entre les points P_1 et Q_1 donne :

$$V_R = V_C = V_L = E_a - V_a. \tag{2.3}$$

La loi d'Ohm aux bornes de la résistance s'écrit :

$$V_R = Ri_R, \tag{2.4}$$

aux bornes du condensateur, on a

$$CV_C' = i_C. \tag{2.5}$$

Aux bornes du transformateur, on utilise la loi des inductances et on suppose que les tensions au bornes des deux bobines sont proportionnelles :

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \text{ et } V_g = \frac{M}{L}V_L. \tag{2.6}$$

La triode est un composant bien plus compliqué à décrire, c'est une « espèce » de résistance pour laquelle le courant est une fonction non linéaire de la tension et d'une tension extérieure, appelée potentiel de grille. Le courant i_a qui sort de la triode est une fonction Φ des tensions V_a et V_g : $i_a = \Phi(V_a + \mu V_g)$ où μ désigne le cœfficient d'amplification de la triode.

On obtient un système électrique normal pour les variables V_C, i_L décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C\frac{dV_C}{dt} = \Phi(E_a - V_C + \mu\frac{M}{L}V_C) - \frac{1}{R}V_C - i_L \\ L\frac{di_L}{dt} = V_C. \end{cases}$$

Les relations (2.2), (2.3), (2.5), (2.6) permettent d'obtenir

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R} + \Psi(kV)\right) + \frac{1}{L}V = 0.$$

A l'équilibre, on trouve $\frac{di_L}{dt} = 0 = V_C$ et $\frac{dV_C}{dt} = 0$. Tout le courant passe dans la bobine et par la triode, on note $i_L = i_0$, on a $i_0 = \Phi(E_a)$. On se place dans un état proche de cet équilibre, on note

$$V_C = E_a - V_a \stackrel{\text{def}}{=} -V,\ i_a - i_0 = \Phi(E_a - kV) - \Phi(E_a) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(kV),$$

avec $k = \frac{\mu M}{L} - 1$. Au voisinage de l'équilibre, on peut approcher la fonction Ψ au premier ordre

$$\Psi(kV) = -\frac{kV}{R_0}$$

la tension V satisfait alors l'équation différentielle linéaire :

$$C\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R} - \frac{kV}{R_0}\right) + \frac{1}{L}V = 0.$$

Si on pousse le développement limité de Ψ à l'ordre 3 :

$$\Psi(kv) = -\alpha V + \beta V^2 + \gamma V^3$$

on vérifie alors qu'il existe des constantes $\alpha', \beta', \gamma', \omega_0$ telles que l'équation s'écrive :

$$\frac{d^2V}{dt^2} - (\alpha' - \beta'V - \gamma'V^2)\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 V = 0.$$

En effectuant l'adimensionnement

$$\tau = \omega_0 t,\ W(\tau) = V(\frac{\tau}{\omega_0})\sqrt{\frac{\gamma'}{\alpha'}},\ \varepsilon = \frac{\alpha'}{\omega_0},\ b = \frac{\beta'}{\alpha'}\sqrt{\frac{\alpha'}{\gamma'}},$$

on retrouve l'équation de van Der Pol :

$$\frac{d^2W}{d\tau^2} - \varepsilon\left(1 - bW - W^2\right)\frac{dW}{d\tau} + W = 0$$

ou encore en posant $Z' = -W$

$$\begin{cases} W' = Z + F(W) \\ Z' = -W \end{cases}$$

où $F(W) = \varepsilon\left(W - \frac{b}{2}W^2 - \frac{1}{3}W^3\right)$ est une fonction cubique.

2.1.3 Réduction à des équations différentielles de degré 1

Les exemples précédents conduisent à des équations différentielles d'ordre supérieur à 1 ou des systèmes d'équations d'ordre supérieur à 1. Il y a alors une astuce (qui a d'ailleurs des variantes) qui permet de ramener une telle équation ou un tel système à un système d'équations différentielles d'ordre 1.

Illustrons la méthode par quelques exemples.

Exemple 2.1.7 Pour transformer l'équation

$$x''' = x^2 + x'x'' \tag{2.7}$$

en un système d'ordre 1, on introduit les variables x_0, x_1, x_2 définies par

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_0^2 + x_1 x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

On voit sans peine que la relation entre ces deux systèmes est la suivante : si $x(t)$ est une solution de (2.7), alors $\begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix}$ est solution de (2.8) ; de même, si $\begin{pmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ est solution de (2.8), alors x_0 est solution de (2.7).

C'est ce qu'on entend par « les équations (2.7) et (2.8) sont équivalentes ».