in François GRANER, Petits Problèmes de physique. Première partie, Springer 1998

 (ENS : 53 GRA 10615)

4 – Tuyau exponentiel

Domaine du cours : acoustique, écoulement compressible.

Formules à utiliser : bilan de masse et de quantité de mouvement (équations de la mécanique des fluides).

Système choisi : une tranche d'air située entre les abscisses x et $x + dx$.

Référentiel choisi : lié au tuyau.

Quantités physiques à introduire, et notations : l'abscisse x, le temps t. Pour l'air : la masse volumique $\rho = \rho_0 + \delta\rho(x,t)$, la pression $p = p_0 + \delta p(x,t)$, la vitesse $v = 0 + \delta v(x,t)$ le long de l'axe x, la compressibilité $\chi = \rho_0^{-1}\partial\rho/\partial p$. On linéarisera pour de petites perturbations autour de l'état au repos : il s'agit d'acoustique, la perturbation δp est bien plus faible que la pression atmosphérique p_0.

On peut se ramener à un problème à une dimension (toutes les quantités ne dépendent que de x, et les vitesses sont parallèles à x) si le tuyau a une section S qui varie lentement sur une longueur d'onde : $|S(x+\lambda) - S(x)| \ll S(x)$, soit ici $\lambda\alpha \ll 1$. C'est donc une condition qui dépend de la fréquence de l'onde qu'on étudie ! C'est réalisé par certains instruments de musique : pour une trompette, une clarinette, un trombone, typiquement, λ et $\sqrt{S_0}$ sont centimétriques, α^{-1} est métrique. Auquel cas, à notre niveau, on peut s'intéresser uniquement aux modes unidimensionnels (Fig. 14).

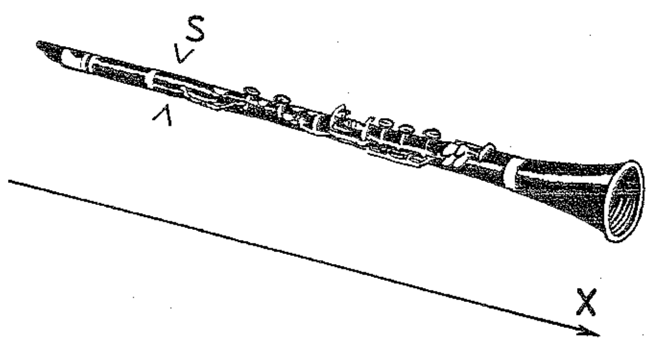

Fig. 14

La viscosité n'est probablement pas négligeable dans ce problème, mais elle n'est certainement pas indispensable dans un premier temps pour répondre à la question posée. Il faut donc écrire l'équation d'Euler à une dimension ; ou bien la retrouver, comme suit. Pour une tranche, le bilan de masse pendant un temps δt s'écrit :

$$\delta(\rho S dx) = \delta(masse) = (entrant) - (sortant) = (S\rho v)_x \delta t - (S\rho v)_{x+dx}\delta t \; ;$$

c'est-à-dire l'équation de conservation de la masse pour un fluide compressible (voir Note) :

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho S v)}{\partial x},$$

qui s'écrit ici, à une dimension et en négligeant $v\partial\rho/\partial x$ devant $\rho_0\partial_v/\partial x$:

$$\chi\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \alpha v = 0.$$

Le bilan de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho S\frac{D(vdx)}{Dt} = (pS)_x - (pS)_{x+dx} + pdS.$$

Ne pas oublier ce dernier terme ! On peut le voir par exemple comme la composante selon x de la force exercée par les parois latérales sur le fluide, voir figure 19 de l'exercice 8. On réécrit cette équation à une dimension, en négligeant $v\partial v/\partial x$ devant $\partial v/\partial t$:

$$\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

au premier ordre en perturbations (en négligeant $v\partial\rho/\partial x$).

En rassemblant ces deux équations on obtient l'équation de propagation de la pression :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \alpha\frac{\partial p}{\partial x} - c^{-2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0,$$

où on a introduit la vitesse du son dans l'air libre $c = (\rho_0\chi)^{-1/2} = (\partial\rho_0/\partial p)^{-1/2}$. Le problème est ainsi écrit sous une forme linéaire, au premier ordre en perturbation. D'où, si on le décompose sur des modes unidimensionnels sinusoïdaux $e^{i(kx-\omega t)}$, la relation de dispersion :

$$k = \frac{i\alpha}{2} \pm \sqrt{-\alpha^2 + \frac{4\omega^2}{c^2}}.$$

En musique, ce qu'on impose c'est la fréquence du son (vibration des lèvres pour les cuivres, de l'anche pour les bois), donc ω est réelle. Il y a propagation si k a une partie réelle, donc si $2\omega > \alpha c$. Seules passent donc les fréquences supérieures à la fréquence de coupure $f_c = \alpha c/4\pi \approx 4,6$ m$^{-1}\times 330$ m.s$^{-1}/12 \approx 25$ Hz. C'est raisonnable pour un instrument de musique ; les instruments graves, plus longs, ont aussi un α plus faible.

Notes :

Tous les pavillons auditifs sont des exemples de tuyaux exponentiels, mais pas lentement variables : comme le mégaphone, le haut-parleur, et les cornets acoustiques ou les pavillons de gramophone de nos grand-pères.

De façon générale, en acoustique et dès que la vitesse du fluide par rapport aux parois dépasse la vitesse du son, c'est-à-dire la vitesse à laquelle les pressions s'équilibrent, il faut tenir compte de la compressibilité du fluide. La notion même de "fluide incompressible" n'a pas de sens. Pour un même fluide, selon l'écoulement considéré, on détermine s'il s'agit d'un "écoulement compressible" ou d'un "écoulement incompressible" après avoir fait l'analyse physique. Pour cela, on détermine si la compressibilité est assez faible pour ne jouer aucun rôle, et on la néglige. Ainsi, à l'exercice 8, c'est uniquement à la fin qu'on peut constater que la compressibilité du sang est négligeable devant une autre compressibilité du problème.

Ouvertures :
Ici k a une partie imaginaire, il y a donc atténuation spatiale même sans tenir compte de la viscosité. Elle devient significative quand f se rapproche de f_c. Comment se comporte alors l'air ?

Discuter le passage vers l'air libre : que deviennent les bilans de masse et de quantité de mouvement à cette discontinuité ? Montrer qu'un pavillon exponentiel diminue la différence entre les impédances acoustiques $Z = \rho c$ dans et hors du tuyau ; par analogie avec de la lumière traversant un dioptre, montrer que le pavillon améliore significativement la transmission d'énergie.