

Équation des ondes

Agrégation de mathématiques
Calcul scientifique

mars 2013

Benjamin BOUTIN

Université de Rennes 1

Il est question dans ces notes de l'équation des ondes linéaire homogène, en dimension un d'espace :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (1)$$

Après avoir situé quelques problèmes physiques faisant intervenir l'équation des ondes, nous analyserons le problème de Cauchy monodimensionnel. Nous aborderons ensuite quelques méthodes de résolution numérique. Si nous avons du temps enfin, nous présenterons quelques éléments de théorie relatifs aux cas des dimensions d'espace deux ou trois.

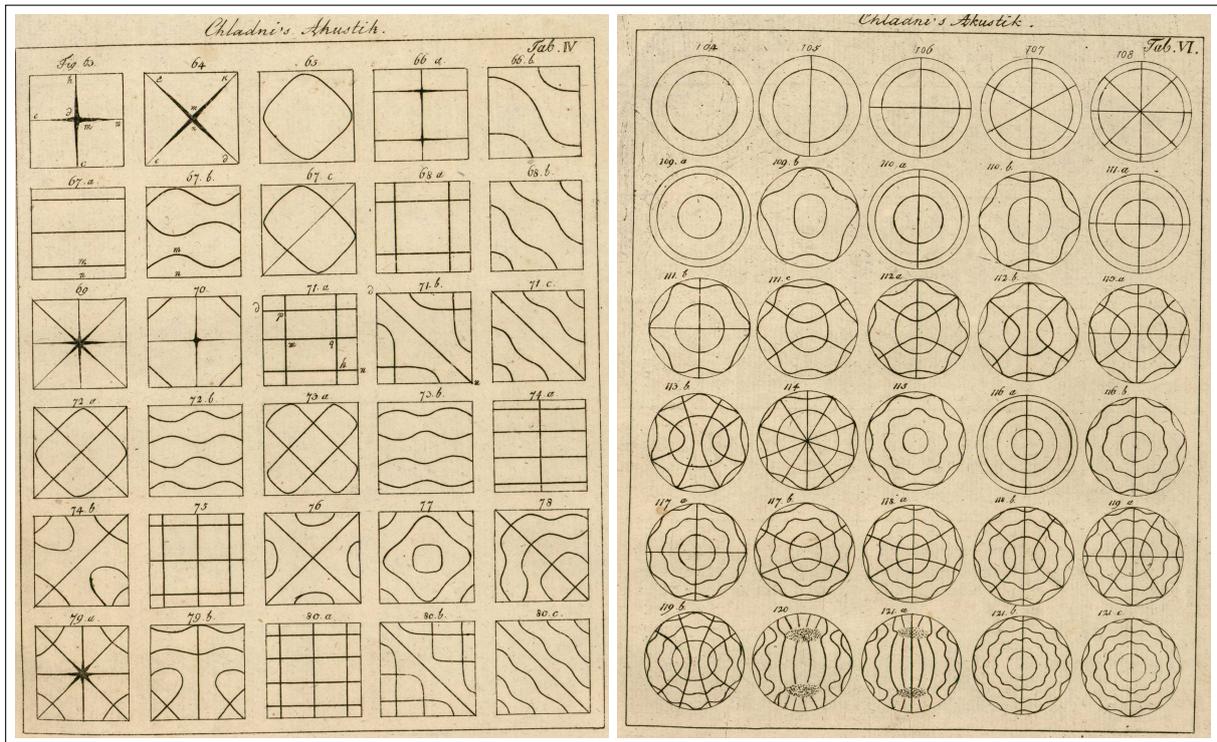


FIGURE 1: Figures de CHLADNI (extraites de [2])

Table des matières

1	Introduction : exemples physiques	3
1.1	Ondes électromagnétiques	3
1.2	Élasticité : la corde vibrante	3
1.3	Ondes acoustiques, équations de la dynamique des gaz	3
2	Analyse du problème monodimensionnel	4
2.1	Préliminaires	4
2.2	Problème de CAUCHY	5
2.3	Conséquences de la formule de D’ALEMBERT	5
2.4	Un mot sur le problème multidimensionnel	6
2.5	Le problème non-homogène	7
3	L’équation des ondes en domaine borné	8
3.1	Séparation des variables et séries de FOURIER	8
3.2	Considérations énergétiques	10
3.3	Transformée de FOURIER	10
4	Schéma numérique aux différences finies	12
4.1	Consistance - Erreur de troncature	13
4.2	Stabilité – Estimation d’énergie discrète	13
4.3	Convergence	16
4.4	Schéma de transport	16

1 Introduction : exemples physiques ([9, pp. 210–214], [7, pp. 10–18])

1.1 Ondes électromagnétiques

Les équations de MAXWELL dans le vide décrivent l'évolution de l'induction magnétique \mathbf{B} et du champ électrique \mathbf{E} selon :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0. \end{aligned}$$

En combinant ces équations, on obtient alors :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon \mu} \nabla^2 \mathbf{E}.$$

Les champs magnétiques et électriques satisfont donc à l'équation des ondes avec pour vitesse $c = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$ qui n'est autre que la vitesse de la lumière dans le vide.

1.2 Élasticité : la corde vibrante

Considérant une corde horizontale de densité ρ supposée uniforme et constante, on note $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur de déplacement par rapport à l'équilibre et $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ le vecteur de la tension (seule force supposée s'appliquer à la corde). La loi de comportement élastique est supposée donnée par la loi de HOOKE $\mathbf{T} = k \nabla \mathbf{u}$.

Sous des hypothèses de mouvement transverse (déplacement longitudinal négligé), après avoir appliqué le principe fondamental de la dynamique ne considérant que la force \mathbf{T} , on obtient alors l'EDP suivante, portant sur la composante verticale de $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ notée $u(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Des modèles analogues s'obtiennent en dimension deux pour modéliser par exemple les ondes transverses dans la peau d'un tambour.

1.3 Ondes acoustiques, équations de la dynamique des gaz

Les équations de la dynamique des gaz sont dérivées à partir des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. On obtient ainsi les équations gouvernant la densité ρ et la vitesse \mathbf{u} :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla_x \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p(\rho) \mathbb{I}) = 0, \end{cases}$$

où $p(\rho)$ est la pression donnée par une loi de comportement. Un gaz parfait adiabatique est par exemple décrit par la loi $pV^\gamma = \text{cste}$. Dans l'hypothèse de solutions régulières et de petites perturbations autour d'un équilibre $\rho = \rho_0 + O(\epsilon)$, $\mathbf{u} = 0 + O(\epsilon)$, on linéarise les équations de la dynamique des gaz de manière à obtenir formellement les EDP suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \rho_0 \nabla_x \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \frac{p'(\rho_0)}{\rho_0} \nabla_x \rho = 0. \end{cases}$$

qui une fois combinées deviennent :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - p'(\rho_0) \Delta \rho = 0.$$

On peut obtenir des modèles analogues pour décrire les ondes longitudinales dans des matériaux solides élastiques (ondes sismiques).

2 Analyse du problème monodimensionnel

2.1 Préliminaires

On s'intéresse à l'équation des ondes 1D posée sur \mathbb{R} tout entier

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

et pour les conditions initiales

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Lemme 1

Soit $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ solution de (1), alors u est la somme de deux ondes progressives u_+ , $u_- \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de vitesses respectives $+c$ et $-c$:

$$u(x, t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct). \quad (3)$$

Démonstration : On utilise le changement de variables $(x, t) \mapsto (y, z) := (x - ct, x + ct)$, qui transforme (1) en $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0$. En effet $\partial_x = \partial_y + \partial_z$ et $\partial_t = c(\partial_y - \partial_z)$, de sorte que $\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = c^2((\partial_y - \partial_z)^2 - (\partial_y + \partial_z)^2) = -4c^2 \partial_{yz}^2$. La conclusion est ensuite immédiate. ■

Remarque 1

La factorisation d'opérateurs suivante permet également de conclure, et sera utilisée plus pleinement pour obtenir la formule de d'ALEMBERT :

$$\partial_{tt}^2 - c^2 \partial_{xx}^2 = (\partial_t - c \partial_x)(\partial_t + c \partial_x).$$

Faisons une petite incursion vers l'équation de transport le principe analogue à celui de la variation de la constante adapté à cette situation EDP : le principe de DUHAMEL.

Lemme 2 (Formule de DUHAMEL)

On considère l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t v + c \partial_x v &= f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Alors il existe une unique solution $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, donnée par la formule de DUHAMEL :

$$v(x, t) = v_0(x - ct) + \int_0^t f(x - c(t - s), s) ds.$$

Démonstration : Si $f \equiv 0$, la solution v est obtenue par la méthode des caractéristiques : on définit $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ comme la solution du problème de CAUCHY : $X'(t) = c$, $X(0) = x_0$. Ici on a simplement $X(t) = x_0 + ct$. Alors v est constante le long de chacune des caractéristiques : $v(X(t), t) = v(x_0, 0)$ autrement dit $v(x, t) = v_0(x - ct)$.

Si maintenant f est quelconque, sachant que $\partial_t v + X'(t) \partial_x v = f$, on obtient $\frac{d}{dt}(v(X(t), t)) = f(X(t), t)$ et par intégration $v(X(t), t) = v(x_0, 0) + \int_0^t f(X(s), s) ds$. Soit encore $v(x_0 + ct, t) = v_0(x_0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s) ds$, ce qui donne finalement $v(x, t) = v_0(x - ct) + \int_0^t f(x + cs - ct, s) ds$. ■

Remarque 2 (Équation de transport à vitesse variable)

Considérant l'équation de transport plus générale $\partial_t v + a(x, t) \partial_x v = f(x, t)$, pour un champ de vitesse $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ globalement lipschitzien par rapport à x , on rappelle qu'il y a

existence et unicité de la solution $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ (obtenue en appliquant le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ sur les EDO satisfaites par la solution sur les courbes caractéristiques). On laisse le soin au lecteur d'établir la formule de DUHAMEL dans cette situation.

2.2 Problème de CAUCHY

Revenons à l'équation des ondes et prouvons le caractère bien posé du problème de CAUCHY que constitue (1)(2).

Théorème 3 (Existence et unicité - formule de D'ALEMBERT)

Soient $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ du problème de CAUCHY (1)(2), donnée par la formule de D'ALEMBERT :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) dy. \quad (4)$$

Démonstration : Soit u une solution de (1)(2) de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$. En posant $v = \partial_t u + c \partial_x u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, d'après la factorisation d'opérateur déjà mentionnée, v est alors solution du problème de CAUCHY $\partial_t v - c \partial_x v = 0$ muni de la condition initiale $v(x, 0) = h(x) + cg'(x)$.

Il s'agit d'une simple équation de transport dont la solution est donnée, comme on l'a vu par : $v(x, t) = v(x + ct, 0) = h(x + ct) + cg'(x + ct)$.

Pour revenir à u , on utilise la définition de v : $\partial_t u + c \partial_x u = v$ et la formule de DUHAMEL :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(x - ct, 0) + \int_0^t v(x - c(t - s), s) ds \\ &= g(x - ct) + \int_0^t (h(x + c(2s - t)) + cg'(x + c(2s - t))) ds \\ &= g(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (h(y) + cg'(y)) dy \quad (4). \end{aligned}$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que la formule de D'ALEMBERT constitue bien une solution de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ pour le problème de CAUCHY considéré. ■

À partir de la formule de D'ALEMBERT, on est finalement en mesure d'identifier les deux ondes progressives u_- et u_+ constituant u , introduites dans le Lemme 1, en fonction des données du problème de CAUCHY :

$$u_-(y) = \frac{g(y)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^y h(x) dx, \quad u_+(z) = \frac{g(z)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^z h(x) dx. \quad (5)$$

2.3 Conséquences de la formule de D'ALEMBERT

La formule de D'ALEMBERT (4) permet d'observer la propriété suivante de stabilité, caractérisée par la dépendance continue de la solution par rapport aux données de CAUCHY en norme $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$ pour tout $T > 0$ fixé.

Corollaire 4 (Stabilité en norme $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])$)

Soit $T > 0$ fixé et $\epsilon > 0$ donné, soient (g_1, h_1) et (g_2, h_2) deux couples de fonctions dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tels que

$$\|g_1 - g_2\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|h_1 - h_2\|_\infty \leq \epsilon.$$

Soient u_1 et u_2 les solutions respectivement obtenues pour ces données de CAUCHY.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, $t \leq T$, on a



$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon(1 + T).$$

Démonstration : Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$:

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq \frac{1}{2}|g_1(x + ct) - g_2(x + ct)| + \frac{1}{2}|g_1(x - ct) - g_2(x - ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |h_1(y) - h_2(y)| dy. \end{aligned}$$

■

Domaine de dépendance et domaine d'influence. Comme on le voit dans la formule de D'ALEMBERT, il y a propagation à vitesse finie de l'information. C'est une propriété typique des EDP hyperboliques. Plus précisément, le domaine de dépendance de (x, t) est le triangle $\Delta_{x,t} = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } 0 \leq \tau \leq t, -c(t-\tau) \leq y-x \leq c(t-\tau)\}$ (cf. FIGURE 2). Réciproquement, le domaine d'influence du point (x, t) est le cône $\Gamma_{x,t} = \{(y, \tau) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } \tau \geq t, -c(\tau-t) \leq y-x \leq c(\tau-t)\}$.

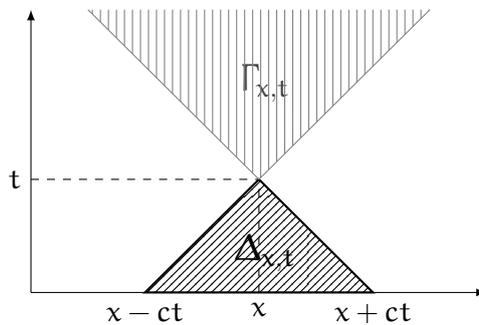


FIGURE 2: Domaines de dépendance et d'influence

Exemple : Supposons que $\text{Supp } h \cup \text{Supp } g \subset [\alpha, \beta]$ et soit alors $x_0 > \beta$. On pose $t_0 = \frac{1}{c}(x_0 - \beta)$ et $\bar{t} = \frac{1}{c}(x_0 - \alpha)$. Alors la solution u est telle que $u(x_0, t) = 0$ si $t < t_0$ et $u(x_0, t) = \frac{1}{2c} \int_{E(t)} h(y) dy$ où $E(t) = [\alpha, \beta] \cap [x_0 - ct, x_0 + ct]$. Dans le premier cas, aucune information n'est encore parvenue en x_0 , dans le second cas, l'information provenant de g est "partie plus loin".

Pas d'effet régularisant. Contrairement à l'équation de la chaleur, il n'y a pas d'effet régularisant de la solution : la solution n'est pas plus (ni moins) régulière que sa donnée initiale. C'est également une propriété typique des EDP hyperboliques linéaires. Elle est fortement liée au caractère "réversible" en temps de l'équation. En particulier, les singularités éventuelles sont simplement propagées (ce qui pourrait nous amener à envisager des solutions dans un sens plus faible que précédemment).

Absence de principe du maximum. Contrairement à l'équation de la chaleur, on ne dispose pas d'un principe du maximum pour l'équation des ondes. Pour s'en convaincre, on regarde par exemple la solution dans le cas $g \equiv 0$ et $h \neq 0$. La solution n'est pas nulle et donc elle ne vérifie pas $\min_{x \in \mathbb{R}} u(x, 0) \leq u(x, t) \leq \max_{x \in \mathbb{R}} u(x, 0)$.

2.4 Un mot sur le problème multidimensionnel [7, Chap. 9]

On dispose également de formules explicites en dimensions deux et trois : la formule de KIRCHHOFF donne la solution de l'équation du problème de Cauchy (1)(2) posé sur \mathbb{R}^3 à la manière de la formule de D'ALEMBERT.

Proposition 5 (Formule de KIRCHHOFF)

Soient $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ et $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$, alors l'unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+)$ du problème (1)(2) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_S g(x) \, dS \right] + \frac{1}{4\pi c^2 t} \iint_S h(x) \, dS, \quad (6)$$

où S est la sphère de centre x et de rayon ct .

De la même manière on dispose d'une formule de représentation pour le cas de la dimension 2 :

Proposition 6 (Formule de POISSON)

Soient $g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ et $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, alors l'unique solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+)$ du problème (1)(2) est donnée par :

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \int_{y \in B} \frac{g(y) \, dy}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}} \right] + \frac{1}{2\pi c} \int_{y \in B} \frac{h(y) \, dy}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - y|^2}}, \quad (7)$$

où B désigne le disque de centre x et de rayon ct .

Le lecteur trouvera les preuves de ces propositions par exemple dans [7, pp.222–227] ou encore dans [6, pp.277–280]. Ces formules donnent une illustration du principe de HUYGENS, largement étudié dans les travaux de J. HADAMARD.

Corollaire 7 (Principe d'HUYGENS)

« Alors qu'une onde sphérique se propage dans notre espace à trois dimensions en partant d'un point et se répartit sur des sphères de rayon croissant, dans le cas d'un nombre pair de dimensions, l'onde qui est partie d'un certain point, remplit toute la boule et pas seulement la sphère; de sorte que si nous devons écouter un concert dans un espace à nombre pair de dimensions, il resterait après le passage du front d'onde un son résiduel; étant donné la précision que nous exigeons de la musique, je pense que la différence serait assez importante! » †

2.5 Le problème non-homogène**Proposition 8 (Problème de CAUCHY non-homogène)**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, on considère le problème de CAUCHY non-homogène suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1')$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

avec $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Alors il y a existence et unicité de la solution $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$, donnée par :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(x + ct) + g(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} h(y) \, dy + \frac{1}{2c} \int_{\Delta_{x,t}} f(y, r) \, dy \, dr. \quad (8)$$

† L. SCHWARTZ dans Centenaire de Jacques Hadamard, *La Jaune et la Rouge*, 204 (1966). Plaquette éditée par la Société Amicale des Anciens Élèves de l'École polytechnique.

Démonstration : On reprend la démonstration de la formule de D'ALEMBERT en définissant de la même manière v qui cette fois-ci est solution du problème de CAUCHY $\partial_t v - c \partial_x v = f$, de sorte que l'on a, par la formule de DUHAMEL :

$$v(x, s) = h(x + cs) - cg'(x + cs) + \int_0^s f(x + c(s - r), r) dr.$$

La résolution de $\partial_t u + c \partial_x u = v$ fait donc ensuite apparaître un terme supplémentaire qui correspond dans le calcul de

$$\int_0^t v(x - c(t - s), s) ds, \text{ à } \int_0^t \int_0^s f(x - c(t - s) + c(s - r), r) dr ds.$$

Pour identifier cette intégrale, on considère le changement de variable $(s, r) \mapsto (y, r)$ avec $y = x - c(t - s) + c(s - r)$ qui envoie le domaine d'intégration $\{(s, r), 0 \leq s \leq t, 0 \leq r \leq s\}$ sur le triangle $(y, r) \in \Delta_{x,t}$, avec $2c ds dr = dy dr$. En effet $r \leq s \leq t$ est équivalent à $x - c(t - r) \leq y \leq x + c(t - r)$. Le terme supplémentaire introduit par la source f est donc bien celui annoncé dans (8). ■

De même que précédemment, on obtient la continuité de la solution relativement aux données de CAUCHY et au terme source, en norme $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ pour tout $T > 0$ fixé.

Corollaire 9 (Stabilité pour le problème de CAUCHY non-homogène)

Soit $T > 0$ fixé et $\epsilon > 0$ donné, soient (g_1, h_1) et (g_2, h_2) deux couples de fonctions dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et f_1, f_2 des termes sources continus sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, tels que

$$\|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \|h_1 - h_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \epsilon, \quad \|f_1 - f_2\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \epsilon.$$

Soient u_1 et u_2 les solutions respectivement obtenues pour ces données de CAUCHY et termes sources. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+, t \leq T$, on a

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \epsilon(1 + T + T^2).$$

3 L'équation des ondes en domaine borné

On considère à présent l'équation des ondes 1D posée sur le domaine d'espace normalisé $[0, 1]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad x \in]0, 1[, \tag{9}$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = h(x), \quad x \in]0, 1[, \tag{10}$$

et par exemple les conditions de bord de DIRICHLET homogène

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0. \tag{11}$$

3.1 Séparation des variables et séries de FOURIER

La séparation des variables consiste à rechercher des solutions de (9)(10)(11) qui prendraient la forme

$$u(x, t) = K(t)U(x), \quad t > 0, \quad x \in (0, 1).$$

En injectant formellement cette formule dans l'équation des ondes (9), on obtient alors $K''(t)U(x) = c^2 K(t)U''(x)$, nécessairement, on a alors

$$U''(x) = \lambda U(x), \quad x \in (0, 1) \tag{12}$$

et

$$K''(t) = \lambda c^2 K(t), \quad t > 0, \quad (13)$$

où λ est un réel jusque là indéterminé.

Les solutions de la première équation prennent la forme $U(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$. Les conditions de DIRICHLET reportées sur U imposent ensuite les conditions $U(0) = U(1) = 0$ ce qui nécessite d'avoir $\alpha = -\beta$ et $e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}}$.

Dès lors il apparaît qu'on ne trouve aucune solution si $\lambda > 0$ et que les seules valeurs convenables pour $\lambda \leq 0$ sont les valeurs pour lesquelles $\sqrt{\lambda} \in i\pi\mathbb{Z}$, soit encore $\lambda = -(n\pi)^2$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors la solution est multiple de $U(x) = \sin(n\pi x)$ auquel correspond un facteur temporel oscillant de la forme $K(t) = a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)$. Toute combinaison finie de telles fonctions est réciproquement solution de (9)(11).

De manière plus générale, si les conditions initiales g et h admettent des développements en série de FOURIER de la forme

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \sin(n\pi x), \quad h(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (n\pi c) b_n \sin(n\pi x),$$

alors la solution du problème de DIRICHLET est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)) \sin(n\pi x), \quad (14)$$

sous réserve que cette série converge et que l'on puisse dériver deux fois sous le signe somme par rapport à chacune des variables. Ce qui est le cas si g et h sont suffisamment régulières.

Une condition suffisante pour que la série (14) soit solution de classe $\mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ est par exemple d'avoir $g \in \mathcal{C}^4([0, 1])$, $h \in \mathcal{C}^3([0, 1])$ et les conditions de compatibilité $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = h(0) = h(1) = 0$. On trouvera plus de détails à ce sujet par exemple dans le livre de S. SALSA [6].

Remarque 3

On dispose de méthodes analogues pour le cas de conditions de bord de NEUMANN $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0$, avec des solutions de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n \cos(n\pi ct) + b_n \sin(n\pi ct)) \cos(n\pi x), \quad (15)$$

ou encore pour des conditions de bord de ROBIN ou périodiques.

Remarque 4

Ce principe de superposition de modes propres est depuis longtemps connu dans les expériences d'acoustique. On y appelle « harmoniques » les fréquences associées à chacun des modes propres. Dans les cas simples, tels que celui de la corde vibrante ici présenté, les harmoniques sont toutes idéalement multiples d'une fréquence dite « fondamentale » (la réalité est en général un peu différente du fait des effets non-linéaires négligés dans les modèles les plus simples).

Pour des situations plus complexes, par exemple pour l'équation des ondes posée sur un domaine borné Ω du plan ou de l'espace, l'obtention des modes et fréquences propres est plus ardue. Elle se ramène à la résolution d'un problème aux valeurs propres dont les solutions sont liées à la géométrie du domaine Ω :

$$\text{Déterminer les couples } (\lambda, U) \in \mathbb{R} \times H_0^1(\Omega) \text{ tels que } -\Delta U = \lambda U.$$

La FIGURE 1 en première page reproduit les représentations faites par CHLADNI en 1802 dans son traité d'Acoustique [2]. On y observe les motifs créés par du sable déposé sur une plaque, carrée ou ronde, mise en vibration par un archet de violon frotté sur un point du

bord, ou soumis à une oscillation de fréquence donnée. Cette excitation met alors la plaque en résonance selon un de ses modes propres $U(x)$ associé à une fréquence λ , dépendant tous deux de la géométrie du domaine. Le sable se localise finalement aux nœuds des modes propres, réalisant $U(x) = 0$, seuls points immobiles de la plaque.

3.2 Considérations énergétiques

Étant donné $u \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$, on définit l'énergie totale à l'instant t par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)^2 + c^2 \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)^2 \right) dx.$$

Le premier terme correspond à l'énergie cinétique, le second à l'énergie potentielle.

Proposition 10 (Conservation de l'énergie)

Soit $u \in \mathcal{C}^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+)$ une solution du problème de CAUCHY-DIRICHLET (9)(10)(11). Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0)$.

Démonstration : Du fait de la régularité de u , la fonction $t \mapsto \mathcal{E}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Calculons

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int_{[0,1]} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) dx.$$

Par intégration par parties, le second terme vaut

$$\int_{[0,1]} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = - \int_{[0,1]} c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \left[c^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^1. \tag{16}$$

La crochets s'annule par la condition de bord de DIRICHLET (ou de NEUMANN). Ainsi

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int_{[0,1]} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0. \quad \blacksquare$$

Remarque 5

La conservation de l'énergie assure l'unicité de la solution au problème considéré. En effet, considérant deux solutions régulières u_1 et u_2 pour des mêmes données de CAUCHY, la différence $u_1 - u_2$ est solution de l'équation des ondes avec données de CAUCHY nulles. Son énergie totale est conservée, mais elle est nulle à $t = 0$. Les solutions coïncident donc à une constante près, qui ne peut qu'être nulle au vu des conditions de bord.

3.3 Transformée de FOURIER

Nous revenons au cas de l'équation des ondes posée sur \mathbb{R} tout entier (1)(2). Mais on s'intéresse maintenant aux solutions dans la classe de Schwartz $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$:

$$v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \iff \forall j \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^n v^{(j)}(x) = 0,$$

solutions pour lesquelles on considérera la transformée de FOURIER en espace, notée \mathcal{F} ou $\widehat{\cdot}$ dans la suite, définie pour $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{F}v : \xi \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} v(x) e^{i\xi x} dx.$$

On rappelle les propriétés suivantes :

Proposition 11

L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par la transformée de FOURIER. Il est également stable par dérivation, convolution et multiplication par des polynômes. On a notamment les relations d'isométrie :

$$\begin{aligned}\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \int f \bar{g} &= \int \widehat{f} \overline{\widehat{g}}, \\ \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \widehat{f * g} &= \frac{1}{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}, \\ \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{N}, \quad \widehat{\partial^\alpha f}(\xi) &= (i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi), \\ \overline{\mathcal{F}} \mathcal{F} &= \mathcal{F} \overline{\mathcal{F}} = \text{Id},\end{aligned}$$

où $\overline{\mathcal{F}}$ est la transformée de FOURIER inverse obtenue en remplaçant i par $-i$.

Dans ce contexte, on a le

Théorème 12

Soient $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$, qui vérifie

$$\mathcal{F}u(\xi, t) = \mathcal{F}g(\xi) \cos(ct|\xi|) + \mathcal{F}h(\xi) \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}. \quad (17)$$

Démonstration : Les conditions initiales (2) deviennent après transformation de Fourier : $\mathcal{F}u(\xi, 0) = \mathcal{F}g(\xi)$ et $\partial_t \mathcal{F}u(\xi, 0) = \mathcal{F}h(\xi)$. L'EDP (1) donne quant à elle : $\partial_{tt}^2 \mathcal{F}u(\xi, t) + c^2 \xi^2 \mathcal{F}u(\xi, t) = 0$. Pour tout ξ fixé, on résout alors cette EDO compte tenu des données initiales. On obtient la formule annoncée.

Réciproquement, on vérifie la régularité annoncée de cette solution. ■

Remarque 6

En calculant la transformée de FOURIER inverse de cette expression, ou plus simplement, la transformée de FOURIER de la formule (4), on retrouve bien sûr la formule de D'ALEMBERT.

Théorème 13 (Conservation de l'énergie et équirépartition de l'énergie en temps long)

Soient $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{S}(\mathbb{R}))$ solution du problème de CAUCHY (1)(2) et soit

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_c(t) + \mathcal{E}_p(t), \quad \text{où } \mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx \quad \text{et } \mathcal{E}_p(t) = \frac{c^2}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx.$$

Alors on a pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}(0), \quad \text{et } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p(t) = \frac{1}{2} \mathcal{E}(0).$$

Démonstration : On réexprime l'énergie $\mathcal{E}(t)$ à l'aide de la transformée de FOURIER de $u(\cdot, t)$, ceci en utilisant la formule de PLANCHEREL :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}u(\xi, t) \right|^2 + c^2 \xi^2 |\mathcal{F}u(\xi, t)|^2 \right) d\xi.$$

À partir de la formule (17), on identifie alors ces termes pour obtenir

$$\begin{aligned}\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}u(\xi, t) \right|^2 &= (-c|\xi| \mathcal{F}g(\xi) \sin(ct|\xi|) + \mathcal{F}h(\xi) \cos(ct|\xi|)) (-c|\xi| \overline{\mathcal{F}g}(\xi) \sin(ct|\xi|) + \overline{\mathcal{F}h}(\xi) \cos(ct|\xi|)), \\ |\mathcal{F}u(\xi, t)|^2 &= (\mathcal{F}g(\xi) \cos(ct|\xi|) + \mathcal{F}h(\xi) \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}) (\overline{\mathcal{F}g}(\xi) \cos(ct|\xi|) + \overline{\mathcal{F}h}(\xi) \frac{\sin(ct|\xi|)}{c|\xi|}),\end{aligned}$$

et finalement :

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}u(\xi, t) \right|^2 + c^2 \xi^2 |\mathcal{F}u(\xi, t)|^2 = c^2 \xi^2 |\mathcal{F}g(\xi)|^2 + |\mathcal{F}h(\xi)|^2,$$

soit :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (c^2 \xi^2 |\mathcal{F}g(\xi)|^2 + |\mathcal{F}h(\xi)|^2) d\xi,$$

qui ne dépend pas de t .

L'équirépartition de l'énergie en temps long s'obtient par application du lemme de RIEMANN-LEBESGUE. La preuve est laissée au lecteur qui pourra au besoin se reporter à [8, p.116]. ■

4 Schéma numérique aux différences finies ([1, pp. 59-64] [7, pp. 201-205])

On souhaite résoudre de manière approchée l'équation des ondes posée sur le domaine borné en espace $]0, 1[$ avec conditions aux limites périodiques

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & t > 0, x \in]0, 1[, \\ u(t, x + 1) = u(t, x), & t > 0, x \in]0, 1[, \\ u(0, x) = g(x), & x \in]0, 1[, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = h(x), & x \in]0, 1[. \end{cases} \quad (18)$$

Les fonctions g et h sont supposées admettre des prolongements 1-périodiques de classe \mathcal{C}^2 et \mathcal{C}^1 respectivement. On propose un schéma numérique pour approcher la solution u aux points

$$x_0 = 0, x_j = j\Delta x, j = 0, \dots, J + 1, x_{J+1} = 1,$$

aux instants

$$t^n = n\Delta t, n \in \mathbb{N}.$$

S'appuyant sur des développements de Taylor de la solution exacte u au voisinage du point (x, t) , le schéma aux différences finies proposé calcule des valeurs u_j^n approchant la valeur exacte $u(t^n, x_j)$.

Définition 14 (*Schéma centré pour l'équation des ondes*)

On définit le schéma centré pour l'équation des ondes par :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0, \quad n \geq 1, 0 \leq j \leq J, \quad (19)$$

avec les données initiales

$$u_j^0 = g(x_j), \quad u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j), \quad 1 \leq j \leq J, \quad (20)$$

et une condition de périodicité :

$$u_{j+1}^n = u_0^n, \quad n \geq 1. \quad (21)$$

C'est un schéma explicite :

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (22)$$

Les données initiales sont construites sur la base du développement de Taylor de u à l'ordre 1 en $t = 0$, mais pour approcher la donnée initiale u^1 à l'ordre 2, on peut préférer définir :

$$u_j^1 = u_j^0 + \Delta t h(x_j) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0).$$

4.1 Consistance - Erreur de troncature

Définition 15 (*Erreur de troncature*)

On appelle erreur de troncature l'erreur commise en supposant que la solution exacte réalise le schéma numérique :

$$\epsilon_j^n = \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2}. \quad (23)$$

Le schéma est dit consistant si l'erreur de troncature tend vers 0 lorsque Δt et Δx tendent vers 0. On appelle ordre de consistance du schéma en espace p et en temps m les entiers tels que

$$\epsilon_j^n = O(\Delta t^m + \Delta x^p). \quad (24)$$

Attention, l'erreur de troncature n'est pas l'erreur entre la solution exacte et celle approchée par le schéma. Nous verrons plus loin cette « erreur de convergence », mais il y a un peu de travail avant de pouvoir la quantifier précisément.

Lemme 16

Le schéma centré (19) est consistant d'ordre 2 en espace et 2 en temps.

Démonstration : En utilisant la formule de Taylor pour la solution exacte u supposée suffisamment régulière, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\Delta t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) + O(\Delta t^4), \\ \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n))}{\Delta x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \frac{2}{4!} \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + O(\Delta x^4). \end{aligned}$$

Puisque u est solution, les premiers termes disparaissent ; il reste alors une erreur de troncature

$$\epsilon_j^n = \frac{1}{12} \left(\Delta t^2 \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x_j, t^n) - c^2 \Delta x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) \right) + O(\Delta t^4 + \Delta x^4). \quad (25)$$

D'où le résultat. ■

Remarque 7

À noter que si u est de classe \mathcal{C}^4 , alors on peut facilement obtenir que $\partial_{tttt}^4 u = c^4 \partial_{xxxx}^4 u$. Le choix particulier $\Delta t = c\Delta x$ permet ainsi d'annuler exactement le terme résiduel dans la formule ci-dessus de manière à obtenir une erreur de troncature en $O(\Delta t^4 + \Delta x^4)$.

En réalité pour le choix $\Delta t = c\Delta x$, l'erreur de troncature est exactement nulle, on peut s'en convaincre à partir de la décomposition en somme d'ondes progressives de u . La preuve est laissée en exercice.

4.2 Stabilité – Estimation d'énergie discrète

En plus de la consistance définie précédemment, une autre notion fondamentale dans l'analyse d'un schéma numérique est sa « stabilité ».

Définition 17 (*Stabilité d'un schéma aux différences finies*)

Un schéma numérique est dit stable si la solution discrète u_n à l'instant t^n est bornée indépendamment des paramètres de discrétisation Δx et Δt .

L'équation des ondes se prête mal à des estimations en norme infinie (on a remarqué précédemment l'absence d'un principe du maximum pour la solution exacte). On se place ici dans le cadre de l'analyse de stabilité L^2 . On recherche donc une borne en norme L^2 de la solution.

Pour tout instant $n \in \mathbb{N}$, on assimile la solution numérique (\mathbf{u}_j^n) à un élément de $L^2([0, 1])$ en posant $\|\mathbf{u}^n\| = \left(\int_0^1 |\tilde{\mathbf{u}}(t^n, x)|^2 dx \right)^{1/2}$ où $\tilde{\mathbf{u}}(t^n, \cdot)$ est la fonction constante sur chaque intervalle $[x_j, x_{j+1}[$ égale à \mathbf{u}_j^n . Autrement dit, $\|\mathbf{u}^n\| = \left(\sum_{j=0}^J |\mathbf{u}_j^n|^2 \Delta x \right)^{1/2}$. On considère également le produit scalaire associé : $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{j=0}^J \mathbf{u}_j \mathbf{v}_j \Delta x$.

L'analyse de stabilité est obtenue ici sur la base de la propriété de conservation de l'énergie. On montre plus précisément que le schéma préserve une énergie discrète.

Lemme 18 (Conservation de l'énergie discrète)

Soient \mathbf{u}^0 et \mathbf{u}^1 dans $L^2([0, 1])$ et soit (\mathbf{u}_j^n) la solution numérique du schéma (19). On pose

$$\mathbb{E}^{n+1/2} := \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right\|_2^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}),$$

avec $(\mathbf{A}\mathbf{u}^n)_j = -\frac{c^2}{\Delta x^2} (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n)$. Alors l'énergie discrète $\mathbb{E}^{n+1/2}$ est une quantité indépendante de n :

$$\mathbb{E}^{n+1/2} = \mathbb{E}^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (26)$$

Remarque 8 (Consistance de $\mathbb{E}^{n+1/2}$ avec l'énergie continue.)

Avec les notations introduites plus haut, on a bien sûr le terme en temps :

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \frac{\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}^n}{\Delta t} \right|^2 dx.$$

Le terme en espace nécessite une intégration par partie discrète :

$$\frac{1}{2} (\mathbf{A}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) = -\frac{c^2}{\Delta x^2} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^J (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n) \mathbf{u}_j^{n+1} \Delta x,$$

Démonstration : La preuve calque l'intégration par parties dans la preuve de la conservation de l'énergie continue (16). On part de l'équation (19) multipliée par la dérivée discrète centrée $(\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n-1})/(2\Delta t)$, on obtient alors pour tout j et n :

$$\sum_{j=0}^J \left[\frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n-1}}{2\Delta t} - c^2 \frac{\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n}{\Delta x^2} \frac{\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^{n-1}}{2\Delta t} \right] \Delta x = 0.$$

Le premier terme n'est rien d'autre que

$$\sum_{j=0}^J \frac{(\mathbf{u}_j^{n+1} - \mathbf{u}_j^n)^2 - (\mathbf{u}_j^n - \mathbf{u}_j^{n-1})^2}{2\Delta t^3} \Delta x = \frac{1}{2\Delta t} \left(\left\| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} \right\|^2 - \left\| \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 \right).$$

Le second terme donne :

$$\begin{aligned} & c^2 \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} \left(\sum_j (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n) \mathbf{u}_j^{n+1} \Delta x - \sum_j (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n) \mathbf{u}_j^{n-1} \Delta x \right) \\ &= c^2 \frac{1}{2\Delta x^2 \Delta t} \left(\sum_j (\mathbf{u}_{j+1}^n - 2\mathbf{u}_j^n + \mathbf{u}_{j-1}^n) \mathbf{u}_j^{n+1} \Delta x - \sum_j (\mathbf{u}_{j+1}^{n-1} - 2\mathbf{u}_j^{n-1} + \mathbf{u}_{j-1}^{n-1}) \mathbf{u}_j^n \Delta x \right) \\ &= \frac{1}{2\Delta t} ((\mathbf{A}\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}) - (\mathbf{A}\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{u}^n)). \end{aligned}$$

En rassemblant les morceaux, on obtient finalement $E^{n+1/2} = E^{n-1/2}$. ■

Remarque 9

En présence d'un terme source $f_j^n = f(t^n, x_j)$ dans le second membre du schéma (19), on peut adapter la preuve précédente et obtenir directement la quantification de l'énergie

$$E^{n+1/2} - E^{n-1/2} = \frac{1}{2}(f^n, u^{n+1} - u^{n-1}). \quad (27)$$

Lemme 19 (Lemme technique – Admis)

Sous la condition CFL : $\alpha = c\Delta t/\Delta x < 1$, l'énergie discrète $E^{n+1/2}$ constitue une forme quadratique positive. Plus précisément, on a :

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha^2) \left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \right\|^2 \leq E^{n+1/2}. \quad (28)$$

Démonstration : – ■

Corollaire 20 (Stabilité L^2)

Sous la condition CFL $\alpha = c\Delta t/\Delta x < 1$, le schéma (19) est stable L^2 . C'est-à-dire qu'il existe une constante $M > 0$ indépendante de Δt et de Δx telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|u^n\| \leq Mt^n + \|u^0\|.$$

Démonstration : Considérant la conservation de l'énergie discrète et l'inégalité (28), on obtient :

$$\|u^{n+1} - u^n\| \leq \Delta t \sqrt{\frac{2E^{1/2}}{1 - \alpha^2}},$$

puis en utilisant l'inégalité triangulaire on en déduit que

$$\|u^{n+1}\| \leq \Delta t \sqrt{\frac{2E^{1/2}}{1 - \alpha^2}} + \|u^n\|.$$

Par récurrence on obtient alors facilement l'estimation

$$\|u^n\| \leq t^n \sqrt{\frac{2E^{1/2}}{1 - \alpha^2}} + \|u^0\|.$$

De plus on peut majorer $E^{1/2}$ indépendamment de Δt et Δx . ■

Remarque 10

Encore une fois, en présence d'un terme source f_j^n dans le schéma (19), on peut adapter la preuve de manière à obtenir la stabilité L^2 :

$$\sqrt{E^{n+1/2}} \leq \sqrt{E^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|f^k\|. \quad (29)$$

4.3 Convergence

Définition 21 (*Erreur de convergence*)

On appelle *erreur de convergence* la différence entre la solution exacte et la solution numérique

$$e_j^n = u(x_j, t^n) - u_j^n. \quad (30)$$

On dira que le schéma est convergent si pour tout $T > 0$

$$\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sup_{\substack{n \geq 0 \\ t^n \leq T}} \|(u_j^n - u(x_j, t^n))_{j \in \mathbb{Z}}\|_2 = 0. \quad (31)$$

En fait, l'erreur de convergence est alors du même ordre que l'erreur de troncature si les données initiales sont approchées au même ordre.

À l'aide des propriétés de consistance et de stabilité, un résultat classique permet d'obtenir la convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Le théorème de LAX affirme que, pour un schéma linéaire, « consistance et stabilité implique convergence ».

Théorème 22 (*Convergence du schéma centré - Admis*)

Si la solution u du problème de CAUCHY est assez régulière, et sous la condition CFL $c\Delta t < \Delta x$, le schéma centré (19) est convergent.

Démonstration (Principe de la preuve) : La solution exacte réalise le schéma à l'erreur de consistance près :

$$\frac{u(x_j, t^{n+1}) - 2u(x_j, t^n) + u(x_j, t^{n-1}))}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u(x_{j+1}, t^n) - 2u(x_j, t^n) + u(x_{j-1}, t^n)}{\Delta x^2} = \epsilon_j^n.$$

La solution numérique réalise le schéma de manière exacte :

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

En soustrayant les deux équations précédentes on obtient donc une équation portant sur l'erreur de convergence e_j^n qui résout le schéma

$$\frac{e_j^{n+1} - 2e_j^n + e_j^{n-1}}{\Delta t^2} - c^2 \frac{e_{j+1}^n - 2e_j^n + e_{j-1}^n}{\Delta x^2} = \epsilon_j^n,$$

avec des données initiales $e_j^0 = 0$ et $e_j^1 = O(\Delta t)$. En utilisant le résultat de stabilité associé à ce problème, par exemple 29, on obtient que l'énergie associée vérifie la majoration

$$\sqrt{E^{n+1/2}} \leq \sqrt{E^{1/2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \Delta t \sum_{k=1}^n \|\epsilon^k\|.$$

Le premier terme correspond à l'erreur sur les données initiales, et le second est le résidu hérité de l'erreur de consistance, en $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$ ici. ■

4.4 Schéma de transport

Nous proposons ici une approche numérique alternative qui s'appuie sur les méthodes numériques dédiées à la résolution des équations de transport.

Remarquons que l'on peut réécrire l'équation des ondes (1) en posant $v = \partial_x u$ et $w = \partial_t u$. On obtient alors le système d'EDP d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Sous forme matricielle, il se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

accompagné des données initiales $v(x, 0) = g'(x)$ et $w(x, 0) = h(x)$. Ce dernier système est bien entendu hyperbolique car A est diagonalisable (ses valeurs propres sont précisément $\pm c$).

On peut donc utiliser des schémas numériques dédiés à l'équation d'advection :

- schéma de Lax-Friedrichs
- schéma de Lax-Wendroff
- schéma décentré amont sur chaque composante de la base de vecteurs propres de A .

Références

- [1] Grégoire ALLAIRE, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- [2] Ernst Florens Friedrich CHLADNI, *Die Akustik*, Breitkopf und Härtel, 1802.
- [3] Robert DAUTRAY, Jacques-Louis LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1988.
- [4] T. W. KÖRNER, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.
- [5] Alfio QUARTERONI, Fausto SALERI, Palao GERVASIO, *Calcul scientifique. Cours, exercices corrigés et illustrations en MATLAB et Octave*, Springer-Verlag Italia, 2010.
- [6] Sandro SALSA, *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*, Springer-Verlag Italia, 2008.
- [7] Walter A. STRAUSS, *Partial differential equations. An introduction*, John Wiley & Sons, 1992.
- [8] Robert S. STRICHARTZ, *A guide to Distributions Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, 2003.
- [9] G. B. WHITHAM, *Linear and nonlinear waves*, John Wiley & Sons, Pure & Applied Mathematics, 1974.