

Interpolation polynomiale

Agrégation de mathématiques Option modélisation

Benjamin BOUTIN
Septembre 2021

Cadre général

Étant donné une fonction définie sur un intervalle réel $[a, b]$, notée f , et $n + 1$ points de l'intervalle $[a, b]$, deux à deux distincts, notés $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, la question est d'obtenir un polynôme $p \in \mathbb{R}_n[X]$ de degré au plus égal à n vérifiant les conditions d'interpolation suivantes :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad p(x_i) = f(x_i). \quad (\text{I})$$

Possibles applications

- Interpolation de données/mesures concrètes
- Agrandissement d'une image numérique
- Évaluation d'une fonction tabulée
- Conception de méthodes numériques (intégration numérique, éléments finis, etc.)

Questions

- Calcul effectif. Comment limiter le coût de calcul ?
- Qualité de l'interpolation. Comment améliorer la précision de l'approximation ?
- Stabilité. Comment garantir la robustesse ?

Plan du cours

1	Calcul effectif	2
1.1	Base de LAGRANGE	2
1.2	Forme de NEWTON et différences divisées	3
1.3	Autres approches	4
2	Analyse de convergence	5
2.1	Formule d'erreur	5
2.2	Familles de points d'interpolation	6
2.3	Le phénomène de RUNGE	8
3	Approche fonctionnelle	9
3.1	Aparté sur la théorie de l'approximation	9
3.2	Constante de LEBESGUE	10
3.3	Synthèse des résultats de convergence	13

1 Calcul effectif

1.1 Base de LAGRANGE

En premier lieu, énonçons le résultat élémentaire suivant.

Théorème 1 | Existence et unicité du polynôme d'interpolation |

Il existe un unique polynôme p_n de degré au plus n réalisant l'interpolation (I).

Démonstration. L'application $\Phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ définie par $\Phi(p) = (p(x_i))_{i=0, \dots, n}$ est linéaire et injective. Elle réalise ainsi un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R}^{n+1} , d'où l'existence et l'unicité de p_n . Détaillons l'injectivité de Φ . Étant donné $p \in \ker \Phi$, chacun des points x_i , $i = 0, \dots, n$, est une racine du polynôme p . Étant de degré au plus égal à n et admettant au moins $n + 1$ racines deux à deux distinctes, p n'est donc autre que le polynôme nul :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad X - x_i | p. \quad \text{Par primalité des facteurs :}$$

$$\prod_{i=0}^n (X - x_i) | p. \quad \text{Cependant par hypothèse } \deg p \leq n.$$

■

Notons, pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, e_i le $i + 1$ -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} . Connaissant $\Phi(p_n) = \sum_{i=0}^n f(x_i) e_i$ on en déduit $p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$ avec $\ell_i := \Phi^{-1}(e_i)$ pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Pour chaque i , ce polynôme ℓ_i admet les racines $\{x_j\}_{j \neq i}$, deux à deux distinctes et vaut 1 en $x = x_i$; il est immédiat d'en déduire la définition qui suivra. De façon un peu plus abstraite, la famille de polynômes (ℓ_i) est la base antéduale de la base des formes linéaires continues sur $\mathbb{R}_n[X]$ d'évaluations aux points (x_i) (ici justement les coordonnées de l'application Φ).

Définition 2 | Base de LAGRANGE |

La base de LAGRANGE associée aux points $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est la base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de la famille de polynômes $(\ell_i)_{0 \leq i \leq n}$ définis par

$$\ell_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - x_j}{x_i - x_j}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Le polynôme $p_n \in \mathbb{R}_n[X]$ réalisant l'interpolation (I) est $p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) \ell_i$.

Remarque (Coût de calcul)

- Chaque évaluation du polynôme p_n en un point $x \in \mathbb{R}$ donne lieu à $O(n^2)$ opérations élémentaires.
- Des évaluations en des points distincts nécessitent de réévaluer chacun des ℓ_i .
- L'ajout d'un nouveau point d'interpolation nécessite un recalcul de toutes les quantités.

1.2 Forme de NEWTON et différences divisées

D'un point de vue pratique, la méthode usuellement employée pour déterminer p_n s'appuie sur la méthode des différences divisées qui généralise à l'ordre n l'interpolation affine bien connue. L'évaluation du polynôme p_n repose quant à elle sur sa forme de NEWTON. Cette approche est plus efficace (coût de calcul plus faible, ajout d'un point d'interpolation facilité) et également plus stable numériquement (i.e. moins sensible aux fluctuations sur les données ou les calculs).

Le principe sous-jacent est de représenter le polynôme p_n dans la base de $\mathbb{R}_n[X]$ suivante :

$$\mathcal{B} = \{1, X - x_0, (X - x_0)(X - x_1), \dots, (X - x_0)(X - x_1) \dots (X - x_{n-1})\}.$$

Supposant les coefficients d_j connus avec

$$p_n = d_0 + d_1(X - x_0) + d_2(X - x_0)(X - x_1) + \dots + d_n(X - x_0) \dots (X - x_{n-1}),$$

l'évaluation du polynôme p_n en un point x peut être effectuée à travers le schéma de HORNER. Celui-ci réduit à $O(n)$ le nombre d'opérations nécessaires et limite les erreurs de calcul dues au dépassement de capacité (pas de calcul des puissances de x). Il repose sur la reformulation suivante de $p_n(x)$:

$$p_n(x) = d_0 + (x - x_0) \left(d_1 + (x - x_1) \left(d_2 + (x - x_2) \left(\dots (d_{n-1} + d_n(x - x_{n-1})) \dots \right) \right) \right).$$

Les coordonnées $(d_i)_{0 \leq i \leq n}$ dans la base \mathcal{B} s'obtiennent par la méthode des différences divisées (voir [7] pour une preuve). Concrètement, les taux d'accroissements successifs, notés $f[x_i, \dots, x_{i+q}]$, sont définis récursivement sur l'entier q et les variables muettes x_i, \dots, x_{i+q} . Par exemple :

$$\begin{aligned} d_0 &= f(x_0) =: f[x_0], \\ d_1 &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} =: f[x_0, x_1], \\ d_2 &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} =: f[x_0, x_1, x_2], \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur les aspects algébriques et analytiques des différences divisées : symétries, prolongement de la définition au voisinage d'abscisses confondues, lien avec la dérivation usuelle, représentation intégrale, etc., on se référera à [7].

Exemple

Données : $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 1, f(x_0) = 0, f(x_1) = 4, f(x_2) = 1$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$
0	0		
		2	
2	4		1
		3	
1	1		

$$\begin{aligned} p_0(X) &= 0, & p_1(X) &= p_0(X) + 2(X - 0) = 2X \\ p_2(X) &= p_1(X) + 1(X - 0)(X - 2) = 2X + X^2 - 2X = X^2 \end{aligned}$$

Remarque (Calcul de coin de table)

Considérons $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et notons q_{k-1} et p_{k-1} les polynômes d'interpolation de f respectivement aux points x_1, \dots, x_k d'une part et x_0, \dots, x_{k-1} d'autre part.

Considérons alors le polynôme de degré au plus égal à k suivant :

$$r_k(X) = (X - x_0)q_{k-1}(X) - (X - x_k)p_{k-1}(X).$$

Ce dernier vérifie les conditions d'interpolation : $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, r_k(x_i) = (x_k - x_0)f(x_i)$, et donc par unicité

$$r_k(X) = (x_k - x_0)p_k(X),$$

où p_k désigne le polynôme d'interpolation de f aux points x_0, \dots, x_k . L'algorithme de calcul des différences divisées repose alors simplement sur l'identification du coefficient dominant de part et d'autre dans l'identité polynomiale précédente.

Remarque (Coût de calcul)

- Calcul des d_i : $O(n^2)$ opérations
- Evaluation de $p_n(x)$: $O(n)$ opérations supplémentaires
- Ajout d'un point d'interpolation : $O(n)$ opérations supplémentaires.

1.3 Autres approches

Une autre méthode directe pour construire le polynôme p_n consiste à déterminer ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $p_n = \sum_{j=0}^n \alpha_j X^j$. Soit à résoudre le système :

$$\forall i = 0, \dots, n, \quad \sum_{j=0}^n \alpha_j x_i^j = f(x_i).$$

De façon équivalente, le vecteur des coefficients $\mathbf{a} = (\alpha_j)_{j=0, \dots, n}$ est solution du système linéaire $\mathbf{V}\mathbf{a} = \mathbf{y}$, où $\mathbf{y} = (f(x_j))_{j=0, \dots, n}$ et \mathbf{V} est la matrice de VANDERMONDE associée aux (x_i) :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Cette matrice \mathbf{V} est inversible car les x_i sont deux à deux distincts et rappelons que l'on peut démontrer la formule

$$\det \mathbf{V} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Cependant, en pratique la détermination du polynôme p_n à travers ce système linéaire est très décevante du fait du mauvais conditionnement de la matrice \mathbf{V} pour de grandes valeurs de n .

D'autres approches, s'appuyant par exemple sur une formule barycentrique ou sur une projection orthogonale (moindres carrés), méritent également un coup d'œil. Voir références.

2 Analyse de convergence

2.1 Formule d'erreur

Étant donnés des points d'interpolation $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$, on introduit le polynôme $\pi_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ suivant :

$$\pi_{n+1} = \prod_{i=0}^n (X - x_i).$$

Théorème 3 | Erreur locale d'interpolation |

Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ et p_n l'unique solution du problème (I). Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe un réel $\xi \in]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$ tel que

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x).$$

Démonstration. Soit $x \in [a, b]$ un réel fixé, distinct des x_i , $i = 0, \dots, n$ (sans quoi le résultat est directement obtenu). La preuve se base sur l'étude du polynôme $q \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ interpolant f aux points $(x_i)_{i=0, \dots, n}$ et au point x . On remarque que $q - p_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ puis, en observant leurs racines, que π_{n+1} divise $q - p_n$. Les deux polynômes ne diffèrent donc que d'une constante, identifiée par la valeur de q au point $t = x$, on trouve :

$$q(t) = p_n(t) + \pi_{n+1}(t) \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_{n+1}(x)}.$$

Soit $I =]\min(x, x_i), \max(x, x_i)[$. La fonction $f - q$, de classe \mathcal{C}^{n+1} , s'annule en $n+2$ points de I deux à deux distincts. En appliquant le théorème de ROLLE, on en déduit que sa dérivée, de classe \mathcal{C}^n , s'annule en $n+1$ points distincts de I puis, en itérant ce procédé, que sa dérivée $(n+1)$ -ième, de classe \mathcal{C}^0 , s'annule en un point $\xi \in I$. Autrement dit :

$$\underbrace{q^{(n+1)}(\xi)}_{=f^{(n+1)}(\xi)} = \underbrace{p_n^{(n+1)}(\xi)}_{=0} + \underbrace{\pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)}_{=(n+1)!} \frac{f(x) - p_n(x)}{\pi_{n+1}(x)},$$

À toutes fins utiles, on rappelle (sans preuve) le théorème de Rolle.

Théorème 4 | Rolle |

Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque

La preuve précédente dissimule certaines propriétés des différences divisées. En l'occurrence, l'étape d'identification de la constante correspond à une formulation alternative de l'erreur d'interpolation :

$$\forall x \notin \{x_0, \dots, x_n\}, \quad f(x) - p_n(x) = \pi_{n+1}(x) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x].$$

La suite de la preuve correspond à une version à l'ordre $n + 1$ du théorème des accroissements finis permettant d'obtenir, sous réserve de la régularité supposée sur f , l'existence de ξ tel que

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Du résultat précédent découle directement l'estimation en norme infinie sur $[a, b]$ suivante :

$$\|f - p_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\| \|\pi_{n+1}\|.$$

Concernant la convergence uniforme d'une suite de polynômes d'interpolation $(p_n)_{n \geq 0}$ vers f , on peut donc constater que

- le coefficient $1/(n+1)!$ est favorable...
- ... sous réserve que $\|f^{(n+1)}\|$ n'explose pas trop vite, ce qui peut conditionner la fonction interpolée, ...
- ... et que $\|\pi_{n+1}\|$ n'explose pas trop vite, ce qui dépend exclusivement du choix des points d'interpolation.

Exemple (Exercices)

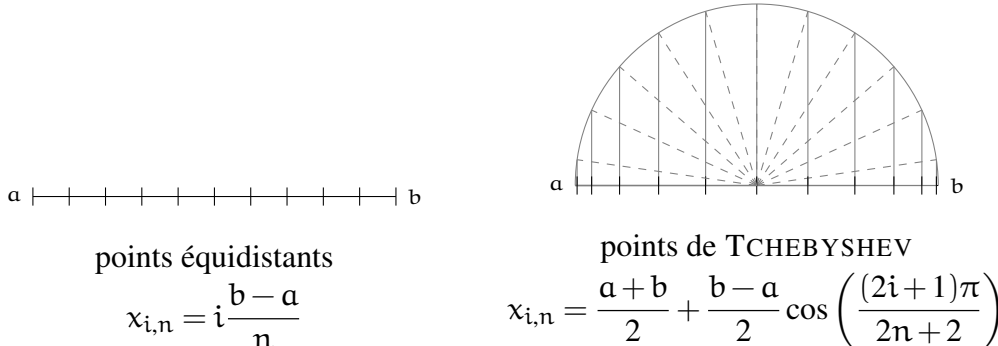
Qu'en est-il de la convergence dans le cas de l'interpolation d'une fonction polynomiale ?
 A-t-on convergence uniforme sur $[a, b]$ de la suite des polynômes d'interpolation de la fonction \cos en des points quelconques de $[a, b]$?

Y'a-t-il convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la suite des polynômes d'interpolation de la fonction \exp dans les situations suivantes :

- $x_i = i/n$ pour $i = 0, \dots, n$?
- $x_i = 1 + i$ pour $i = 0, \dots, n$?
- $x_i = 1 + i/n$ pour $i = 0, \dots, n$?

2.2 Familles de points d'interpolation

Sur un intervalle $[a, b]$, une famille de points d'interpolation est indexée par $n \in \mathbb{N}$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. De nombreux choix sont susceptibles d'être considérés selon la destination du procédé d'interpolation. Par exemple il peut être question d'utiliser les racines successives d'une famille de polynômes orthogonaux afin d'intégrer numériquement une fonction par une méthode gaussienne. Néanmoins, parmi les choix possibles, les plus classiques et commodes lorsque le degré n doit augmenter sont les choix suivants :



À toutes fins utiles, rappelons que les points de TCHEBYSHEV sont obtenus à partir des racines du polynôme du même nom.

Définition 5 | Polynômes de TCHEBYSHEV |

Les polynômes de TCHEBYSHEV sont définis pour $n \in \mathbb{N}$ par $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, ($x \in [-1, 1]$).

Sans exhiber toute la panoplie de résultats concernant cette famille de polynôme, rappelons qu'elle résout un problème de minimisation de la norme uniforme sur un intervalle borné parmi les polynômes de degré donné (avec une normalisation donnée).

Proposition 6 | Propriété du minimax de TCHEBYSHEV |

Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $P = 2^{-n}T_{n+1}$ est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de monôme dominant X^{n+1} qui minimise la quantité $\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$, alors égale à 2^{-n} .

Démonstration. Laissée en exercice. Le cas $n = 1$ a été traité à titre d'archétype en cours. ■

Si la fonction f est suffisamment régulière, de sorte que ses dérivées successives $(f^{(n)})_n$ sont par exemple uniformément bornées en norme infinie (ou modérément croissantes en fonction de n), alors on peut envisager de déduire une estimation en norme infinie par le produit des normes infinies. Pour ce faire, il s'agit d'estimer la quantité $\|\pi_{n+1}\|$, bien sûr indépendante de la fonction f interpolée. La proposition précédente caractérise en ce sens l'optimalité des points de TCHEBYSHEV. De façon plus générale, la proposition suivante permet de maîtriser la façon dont peut évoluer cette quantité. Attention cependant, pour une fonction interpolée f donnée, rien n'indique que l'erreur d'interpolation soit minimale pour le choix des points de TCHEBYSHEV.

Proposition 7

Pour toute famille de points $(x_{i,n})_{0 \leq i \leq n, n \geq 0}$ de l'intervalle $[a, b]$, il existe des constantes $C > 0$ et $\lambda > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ le polynôme π_{n+1} vérifie la majoration uniforme sur $[a, b]$:

$$\|\pi_{n+1}\|_{\infty} \leq C \left(\frac{b-a}{\lambda} \right)^{n+1}.$$

De plus, les constantes λ suivantes conviennent (accompagnées d'une constante C omise) :

- $\lambda = 1$ pour des points quelconques,
- $\lambda = 2$ pour des points quelconques symétriquement répartis autour de $(a+b)/2$,
- $\lambda = e$ pour les points équidistants,
- $\lambda = 4$ pour les points de TCHEBYSHEV.

Démonstration (éléments de preuve, voir [2]).

- Soit $x \in [a, b]$, $|x - x_i| \leq (b-a)$.
- Soit $x \in [a, b]$, on obtient¹ $|x - x_i| |x - x_{n-i}| \leq (b-a)^2/2^2$.
- Soit $x \in [a, b]$, on pose $h = (b-a)/n$ et $s = (x-a)/h$, alors $\pi_{n+1}(x) = h^{n+1} s(s-1) \dots (s-n)$.

1. Petit exercice d'analyse !

Or² $|s-0| |s-1| \dots |s-n| \leq n!$ pour tout $s \in [0, n]$. On a donc $\|\pi_{n+1}\| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} n!$. En utilisant la formule de STIRLING, on obtient $\|\pi_{n+1}\| \leq c \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \leq C \left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}$.

- Les points d'interpolation de TCHEBYSHEV sont les racines du polynôme de TCHEBYSHEV T_{n+1} , rapporté par une transformation affine de $[-1, 1]$ à l'intervalle $[a, b]$: $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}s, -1 \leq s \leq 1$.

$$|\pi_{n+1}(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \underbrace{\prod_{i=0}^n \left|s - \cos\left(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2}\right)\right|}_{=2^{-n}|T_{n+1}(s)| \leq 2^{-n}\|T_{n+1}\|}$$

Puisque $\|T_{n+1}\| = 1$, on obtient alors $\|\pi_{n+1}\| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$. ■

2.3 Le phénomène de RUNGE

Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ définie sur \mathbb{R} , et son interpolation en des points équidistants sur l'intervalle $[-5, 5]$, ainsi que son interpolation en les points de TCHEBYSHEV sur le même intervalle. Les figures concernant les polynômes p_5 et p_{10} sont représentées dans la suite.

On observe que si la convergence semble bien fonctionner au centre de l'intervalle, dans le cas des points équidistants, de fortes oscillations de plus en plus violentes surviennent au bord du domaine. Il n'y a pas convergence uniforme de p_n vers f . En revanche, avec les points de TCHEBYSHEV, la convergence est uniforme.

Dans DEMAILLY [2, p.37], on trouvera l'analyse détaillée de ce phénomène.

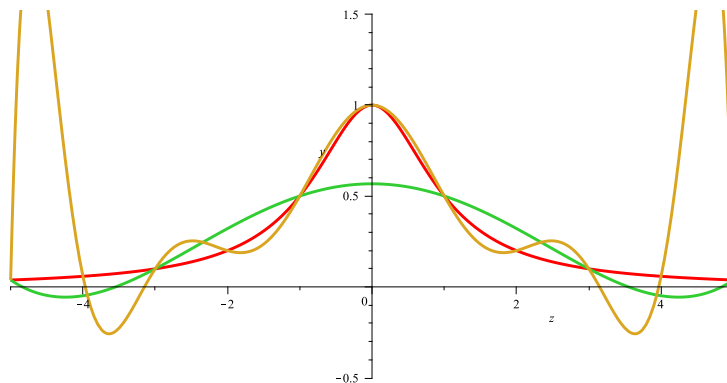


FIGURE 1 – Interpolation équidistante : f en rouge, p_5 en vert, p_{10} en jaune.

Proposition 8 | Convergence uniforme pour des fonctions analytiques |

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction analytique donnée par une série entière au point $\frac{a+b}{2}$ avec un rayon de convergence $R > 0$. Alors les polynômes d'interpolation p_n aux points quelconques $x_{i,n}$ convergent uniformément vers f pourvu que le rayon de convergence R soit suffisamment grand.

2. Ce point nécessite quelques éclaircissements : $\Phi : s \in [0, n] \mapsto |s(s-1) \dots (s-n)|$ est paire par rapport à $s = n/2$, et pour $s \in [0, n/2]$ non-entier, $\Phi(s+1)/\Phi(s) = (s+1)/(n-s) \leq 1$. Donc $\max_{s \in [0, n]} \Phi(s) = \max_{s \in [0, 1]} \Phi(s) \leq n!$.

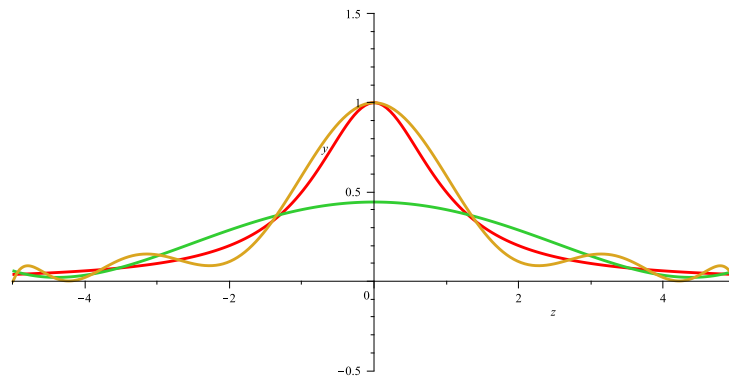


FIGURE 2 – Interpolation de TCHEBYSHEV : f en rouge, p_5 en vert, p_{10} en jaune.

Plus précisément, il suffit que

$$R > \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{\lambda},$$

où λ est une constante telle que dans la Proposition 7.

Démonstration. Voir DEMAILLY [2, p.31]. La preuve s'appuie sur le lemme suivant qui se déduit du théorème de dérivation des séries entières dans leur disque ouvert de convergence. ■

Lemme 9

Soit f développable en série entière au point $\frac{a+b}{2}$ avec un rayon de convergence $R > \frac{b-a}{2}$. Alors pour tout $\frac{b-a}{2} < r < R$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!} \leq \frac{C}{(r - \frac{b-a}{2})^n}.$$

3 Approche fonctionnelle

Références pour cette partie : DEMAILLY [2, p.46], CROUZEIX-MIGNOT [1, p.16], ROMBALDI [6, p.182]. Dans toute cette partie, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a, b])$ muni de la topologie de la norme uniforme sur $[a, b]$, notée simplement $\|\cdot\|$.

3.1 Aparté sur la théorie de l'approximation

Nous évoquons dans cet aparté quelques résultats sur la théorie de l'approximation en norme uniforme de fonctions continues sur $[a, b]$. Ils seront énoncés sans preuve. Le plus fondamental d'entre eux est le résultat de densité des fonctions polynômes dans $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|)$.

Théorème 10 | WEIERSTRASS |

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\| \leq \epsilon$.

De nombreuses preuves existent, par exemple par l'utilisation des polynômes de BERNSTEIN, des polynômes de JACKSON, de sommes de CESARO de séries de TCHEBYCHEV (FÉJER), d'une approximation polynomiale de $|x|$ (LEBESGUE), etc. Voir [6].

Théorème 11 | Polynôme de meilleure approximation en norme uniforme |

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a, b])$ admet un unique polynôme $q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ de meilleure approximation en norme uniforme :

$$q_n = \operatorname{argmin}_{q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - q\|,$$

i.e.

$$\|f - q_n\| = d(f, \mathbb{R}_n[X]).$$

L'existence d'un polynôme de meilleure approximation est une simple conséquence de la continuité de la distance à f sur le fermé borné non-vide de dimension finie constitué des polynômes de degré au plus égal à n . Le résultat d'unicité est plus délicat et se déduit de la propriété d'équi-oscillation suivante : il existe $n + 2$ points deux à deux distincts $y_0 < y_1 < \dots < y_{n+1}$ de $[a, b]$ et $\eta = \pm 1$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, n + 1 \rrbracket, \quad f(y_i) - q_n(y_i) = \eta(-1)^i d(f, \mathbb{R}_n[X]).$$

La propriété du minimax des polynômes de TCHEBYSHEV est alors cruciale dans cette analyse.

3.2 Constante de LEBESGUE

On introduit l'opérateur d'interpolation de LAGRANGE L_n défini par

$$\begin{aligned} L_n : \mathcal{C}([a, b]) &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ f &\longmapsto p_n. \end{aligned}$$

L_n est surjectif et d'image fermée dans $\mathcal{C}([a, b])$.

L'analyse de l'opérateur L_n a une importance pour évaluer la stabilité numérique du procédé d'interpolation. Si f est entachée d'erreurs g , alors $L_n(f + g) = p_n + L_n(g)$ et il est crucial d'évaluer $\|L_n(g)\|$ en fonction de $\|g\|$, autrement dit, la norme de l'opérateur L_n .

Théorème 12 | Théorème et définition |

La norme de l'opérateur d'interpolation L_n est la quantité

$$\|L_n\| = \Lambda_n := \sup_{x \in [a, b]} \left(\sum_{i=0}^n |\ell_i(x)| \right) \quad (1)$$

appelée constante de LEBESGUE associée aux points x_0, x_1, \dots, x_n .

Démonstration. $L_n(g) = \sum_i g(x_i) \ell_i$, d'où $\|L_n(g)\| \leq \sup_{x \in [a,b]} \sum_i |g(x_i)| |\ell_i(x)| \leq \Lambda_n \|g\|$ et par suite $\|L_n\| \leq \Lambda_n$. Par continuité, il existe $\xi \in [a, b]$ t.q. $\Lambda_n = \sum_i |\ell_i(\xi)|$. On construit alors une fonction g continue, affine par morceaux telle que $\|g\| = 1$ et $g(x_i) = \pm 1 = \text{signe}(\ell_i(\xi))$, de sorte que $\|L_n(g)\| \geq \sum_i g(x_i) \ell_i(\xi) = \Lambda_n \|g\|$. Donc $\|L_n\| \geq \Lambda_n$. ■

Par l'utilisation du polynôme de meilleure approximation en norme uniforme, il est possible de quantifier l'erreur d'interpolation de la façon suivante.

Proposition 13 | Majoration de l'erreur d'interpolation |

$$\forall f \in \mathcal{C}([a, b]) \quad \|f - L_n(f)\| \leq (1 + \Lambda_n) d(f, \mathbb{R}_n[X]).$$

Démonstration. Notons $q_n = \operatorname{argmin}_{q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - q\|_\infty$ le polynôme de meilleure approximation uniforme de f . Alors

$$\begin{aligned} f - L_n(f) &= (f - q_n) + q_n - L_n(f) = (f - q_n) - L_n(f - q_n), \\ \|f - L_n(f)\| &\leq \|f - q_n\| + \Lambda_n \|f - q_n\| \leq (1 + \Lambda_n) d(f, \mathbb{R}_n[X]). \end{aligned}$$

En conséquence du théorème d'approximation uniforme de WEIERSTRASS, puisque $d(f, \mathbb{R}_n[X])$ tend vers 0 dès que f est au moins continue, il apparaît que la convergence uniforme est assurée aussitôt que la quantité $\Lambda_n d(f, \mathbb{R}_n[X])$ tend également vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Des résultats plus précis permettent de mettre en balance les deux termes de ce produit de sorte qu'il suffit que $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$ ne diverge pas trop vite.

Proposition 14 | Estimations de Λ_n |

La constante de LEBESGUE des points d'interpolation vérifie les inégalités suivantes.

- Pour les points équidistants :

$$\frac{2^n}{4n^2} \leq \Lambda_n \leq 2^n, \quad \text{plus précisément } \Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{e n \ln n}.$$

- Pour les points de TCHEBYSHEV

$$\frac{2}{\pi} \ln n \leq \Lambda_n \leq \alpha \ln n, \quad \text{plus précisément } \Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln n.$$

- Il existe $c > 0$ tel que pour toute suite de points

$$\Lambda_n \geq \frac{2}{\pi} \ln n - c.$$

Démonstration. La première majoration s'obtient en évaluant $\ell_i(a + \frac{b-a}{2n})$, successivement :

$$\begin{aligned}
 |\ell_i(a + \frac{b-a}{2n})| &= \left| \prod_{j \neq i} \frac{\frac{1}{2} - j}{i - j} \right| \quad (\text{après renormalisation}) \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) \cdot (2 - \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (i - 1 - \frac{1}{2}) \cdot (i + 1 - \frac{1}{2}) \cdot \dots \cdot (n - \frac{1}{2})}{(i \cdot (i - 1) \cdot \dots \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - i))} \\
 &\geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (i - 2) \cdot i \cdot \dots \cdot (n - 1)}{i!(n - i)!} \\
 &\geq \frac{1}{4n^2} \binom{n}{i}.
 \end{aligned}$$

On conclut à l'inégalité souhaitée par sommation.

Les autres inégalités et équivalents sont admis (voir [1], [2]). ■

La dernière minoration de la Proposition est due à ERDÖS (1961) et témoigne de nouveau d'une forme d'optimalité des points de TCHEBYCHEV dans la mesure où la divergence de la constante de LEBESGUE est toujours au moins asymptotiquement équivalente à $\frac{2}{\pi} \ln n$.

Proposition 15 | Estimation de la distance de meilleure approximation uniforme |

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b])$. Alors on a l'estimation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(f, \mathbb{R}_n[X]) \leq 3\omega_f\left(\frac{b-a}{n+2}\right).$$

L'estimation présentée repose sur l'approximation de f par le polynôme de JACKSON et fait intervenir le module de continuité de f défini pour $t > 0$ par

$$\omega_f(t) = \sup\{|f(y) - f(x)|, x, y \in [a, b], |y - x| \leq t\},$$

de sorte que pour tous $x, y \in [a, b]$

$$|f(y) - f(x)| \leq \omega_f(|y - x|).$$

L'utilisation des polynômes de BERNSTEIN permet d'obtenir également un majorant, mais moins efficace, de la forme $C\omega_f\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right)$ (voir [6] et [8]). Dans le cas d'une fonction plus régulière, si $f \in \mathcal{C}^N([a, b])$ pour un certain entier $N \in \mathbb{N}^*$, une estimation bien meilleure asymptotiquement est disponible :

$$\forall n \geq 1, \quad d(f, \mathbb{R}_n[X]) \leq \frac{C}{n^{N-1/2}}.$$

Ce résultat s'obtient à l'aide de la théorie de FOURIER et une preuve figure dans les notes de Miguel RODRIGUES (complément 2020-2021).

3.3 Synthèse des résultats de convergence

Théorème 16 | Résultat "négatif" dans la classe des fonctions continues |

Pour toute famille de points d'interpolation $(x_{i,n})$ de $[a, b]$, il existe $f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que la suite (p_n) des polynômes d'interpolation de f aux points $x_{i,n}$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\| = +\infty$.

Démonstration. Puisque $\Lambda_n \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que la suite d'opérateurs L_n de $\mathcal{L}(\mathcal{C}([a, b]))$ n'est pas uniformément bornée, et par le principe de la borne uniforme du théorème de BANACH-STEINHAUS, n'est pas simplement bornée : $\exists f \in \mathcal{C}([a, b])$ telle que $\sup_{n \geq 0} \|L_n(f)\| = +\infty$. ■

Ce résultat témoigne du fait que le cadre des fonctions seulement continue n'est pas idéal dans la théorie de l'interpolation. Gardons à l'esprit cependant les résultats positifs de la théorie de l'approximation mentionnés plus tôt, valables eux dans ce cadre. Outre ceux-ci, le résultat peu constructif mais positif suivant demeure disponible.

Théorème 17 | Résultat "positif" dans la classe des fonctions continues |

Pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}([a, b])$, il existe une famille de points d'interpolation $(x_{i,n})$, telle que le polynôme d'interpolation converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration. La preuve repose sur le polynôme de meilleure approximation en norme uniforme et du principe d'équi-oscillation qui le caractérise. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'obtenir une propriété d'interpolation en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$ que vérifie ce polynôme de meilleure approximation. ■

En se munissant de fonction plus régulières que continues, on peut aisément redresser le résultat négatif de façon constructive.

Théorème 18 | Cas de fonctions de classe \mathcal{C}^1 |

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, la suite (p_n) des polynômes d'interpolation de f aux points de TCHEBYSHEV de $[a, b]$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence des estimations de la Proposition 14 (estimation de la constante de LEBESGUE) et de la Proposition 15 (estimation de la distance $d(f, \mathbb{R}_n[X])$), utilisant le caractère globalement lipschitzien sur $[a, b]$ des fonctions de $\mathcal{C}^1([a, b])$ (hypothèse suffisante). ■

Références

- [1] Michel CROUZEIX, Alain MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.
- [2] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [3] Franck JEDRZEJEWSKI, *Introduction aux méthodes numériques*, Springer, 2005.
- [4] Alain POMMELLET, *Agrégation de mathématiques. Cours d'analyse*, Ellipses, 1994.
- [5] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO, Fausto SALERI, *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications*, Springer, Milan, 2007.
- [6] Jean-Étienne ROMBALDI, *Interpolation et approximation, Analyse pour l'agrégation*, Vuibert, 2005.
- [7] Michelle SCHATZMAN, *Analyse numérique : une approche mathématique : cours et exercices*, Dunod, 2001.
- [8] Hervé QUÉFFelec, Claude ZUILY, *Analyse pour l'agrégation : cours et exercices corrigés*, Dunod, 2013.