

Équations différentielles

(Suite du cours précédent)

Agrégation de mathématiques Option modélisation

Benjamin BOUTIN
Septembre 2021

II. Aspects numériques du problème de Cauchy

1. Généralités et notations

Nous nous intéressons à l'approximation numérique de la solution maximale du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0, \\ X'(t) &= f(t, X(t)). \end{aligned} \tag{C}$$

où f désigne une fonction définie sur un ouvert $I \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{R}^d , I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d . La donnée de Cauchy est $(0, X_0) \in I \times \Omega$. Le cours précédent garantit l'existence et l'unicité d'une solution maximale (J, X) , J ouvert de I et $X \in \mathcal{C}^1(J)$ ceci sous les hypothèses usuelles du théorème de Cauchy-Lipschitz. Dans l'ensemble de cette étude, nous supposons pour simplifier que $\Omega = \mathbb{R}^d$ tout entier et que les solutions maximales dont l'approximation est envisagée sont définies au moins sur un intervalle $[0, T]$ fixé une fois pour toutes. Cette restriction permettra de focaliser la présentation sur les aspects d'analyse de la méthode numérique plutôt que sur les possibles difficultés inhérentes à sa bonne définition dans une situation trop générale (la solution numérique est-elle à valeurs dans Ω ? que se passe-t-il au voisinage du temps maximal d'existence ?).

Une approximation de la solution X du problème de Cauchy (C) sur $[0, T]$ consistera en une approximation¹ de ses valeurs sur une subdivision $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$ de l'intervalle de temps, avec $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. La quantité suivante sera alors appelée **le pas** de la subdivision :

$$h = \max_{0 \leq n \leq N-1} |t_{n+1} - t_n|.$$

Un résultat de convergence est recherché, dans la limite où le pas h tend vers 0, ce qui nécessite que le nombre de points de la subdivision N tende vers l'infini. Génériquement et pour simplifier, la subdivision pourra être choisie uniforme de sorte que $t_{n+1} = t_n + h$ indépendamment de n . Elle est alors entièrement caractérisée par la connaissance de la seule quantité h : l'entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = T/N$ permet d'obtenir $t_n = nh$, pour $0 \leq n \leq N$.

En chacun des instants t_n , pour $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la valeur $X(t_n) \in \mathbb{R}^d$ de la solution exacte est approchée par une valeur notée $y_n \in \mathbb{R}^d$, obtenue par un **schéma numérique** (concrètement une formule de récurrence

1. Les notations choisies dans ce document sont volontairement distinctes quant à la solution de l'EDO $X(t)$ et son approximation y_n . Cela n'a d'autre but que de permettre une distinction lisible des deux objets, afin de limiter les confusions trop fréquentes.

sur n , dépendant de h). Comme on l'a déjà dit, cette approximation se veut d'autant plus précise que le pas h est petit ou que le nombre de points N est grand, cependant les notations omettent d'explicitier toutes les dépendances de $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ relativement à la subdivision $(t_n)_{0 \leq n \leq N}$. Pour évoquer l'importance du paramètre h , l'erreur globale de convergence sur $[0, T]$ sera par exemple notée de la façon suivante :

$$E(h) = \max_{0 \leq n \leq N} |X(t_n) - y_n|,$$

et, au cours de l'analyse, l'erreur locale de convergence

$$e_n = X(t_n) - y_n.$$

L'objectif est de déterminer des conditions suffisantes sous lesquelles on est en mesure d'obtenir la convergence d'un schéma numérique au sens où : $\lim_{h \rightarrow 0^+} E(h) = 0$. La notion d'ordre du schéma numérique quantifie la vitesse à laquelle cette quantité tend vers 0 (pour l'approximation de solutions régulières), typiquement comme une puissance de h . Par exemple si de façon optimale, on a $E(h) = O(h^2)$, alors le schéma numérique est dit d'ordre 2.

2. Méthodes d'intégration numérique

La dérivation d'un schéma numérique pour les EDO repose sur la forme intégrée de l'équation différentielle (C). En l'occurrence la solution exacte vérifie toutes les égalités de la forme suivante :

$$\forall t, s \in [0, T], \quad X(t) = X(s) + \int_s^t f(\tau, X(\tau)) d\tau. \quad (\mathcal{C}_f)$$

À une certaine erreur d'approximation près, cette intégrale peut être approchée par une formule de quadrature. C'est cette stratégie qui permet de proposer une relation de récurrence afin de déduire par exemple y_{n+1} de y_n , en considérant pour les valeurs successives de n : $t = t_{n+1}$ et $s = t_n$ dans l'intégrale ci-dessus.

Proposition 1 Erreur de quadratures élémentaires

Étant donné $a < b$ et $\phi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ à valeurs réelles, on a

$$\left| \int_a^b \phi(x) dx - (b-a)\phi(a) \right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \sup_{[a,b]} |\phi'| \quad (\text{rect. gauche}),$$

$$\left| \int_a^b \phi(x) dx - (b-a)\phi(b) \right| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 \sup_{[a,b]} |\phi'| \quad (\text{rect. droite}).$$

Si $\phi \in \mathcal{C}^2([a, b])$, alors on a

$$\left| \int_a^b \phi(x) dx - (b-a)\phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{24}(b-a)^3 \sup_{[a,b]} |\phi''| \quad (\text{pt. milieu}),$$

$$\left| \int_a^b \phi(x) dx - (b-a)\frac{\phi(a) + \phi(b)}{2} \right| \leq \frac{1}{12}(b-a)^3 \sup_{[a,b]} |\phi''| \quad (\text{trapèzes}).$$

Remarque

Les résultats généraux propres aux méthodes d'intégration numérique ne sont pas abordés de façon approfondie dans ce document. On pourra au besoin se référer au chapitre adéquat de l'un des ouvrages [1, 2, 3, 4]. On y trouvera en particulier, concernant les formules d'erreurs ci-dessus, le lien entre le caractère exact de la quadrature sur $\mathbb{R}_D[X]$ et la formule d'erreur obtenue.

Quadrature des rectangles à gauche :

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, X(t_n))$$

⇒ **Méthode d'Euler explicite**

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n)$$

Quadrature des rectangles à droite :

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + (t_{n+1} - t_n)f(t_{n+1}, X(t_{n+1}))$$

⇒ **Méthode d'Euler implicite**

$$y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_{n+1}, y_{n+1})$$

Certaines de ces méthodes sont dites **explicites**, c'est à dire que y_{n+1} est obtenu par application directe d'une formule à partir de y_n , mais d'autres méthodes sont dites **implicites** car nécessitent la résolution à chaque étape d'un système d'équations de sorte à déduire y_{n+1} de y_n . Ces équations peuvent être non-linéaires et nécessiter l'emploi d'algorithmes d'approximation tels que la méthode de Newton. Ces méthodes implicites deviennent indispensables dans le cas de problèmes raides, qui occasionnent de difficultés de stabilité en raison de grandes constantes de Lipschitz.

En choisissant plus de points dans la quadrature élémentaire employée, on peut définir une variante explicite à partir d'une méthode a priori implicite, ceci en "emboitant" des méthodes plus simples. C'est le principe des méthodes explicites de type **prédicteur-correcteur**, dont voici deux premiers exemples.

Quadrature des trapèzes :

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + \frac{(t_{n+1} - t_n)}{2} (f(t_n, X(t_n)) + f(t_{n+1}, X(t_{n+1})))$$

⇒ **Méthode de Crank-Nicolson**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{(t_{n+1} - t_n)}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))$$

⇒ **Méthode de Heun**

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1} &= y_n + (t_{n+1} - t_n)f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{(t_{n+1} - t_n)}{2} (f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, \tilde{y}_{n+1})) \end{aligned}$$

Quadrature du point milieu :

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + (t_{n+1} - t_n)f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, X\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right)$$

↳ **Méthode d'Euler point milieu**

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{n+1/2} &= y_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + (t_{n+1} - t_n) f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, \tilde{y}_{n+1/2}\right) \end{aligned}$$

Les deux méthodes précédentes sont en fait des cas particuliers de méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2 que nous allons maintenant brièvement évoquer. **Les méthodes de Runge-Kutta** reposent sur l'approximation de l'intégrale $\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, X(s)) ds$ à l'aide d'un certain nombre de valeurs de temps t intermédiaires et un choix convenable d'un certain nombre de coefficients (souvent représentés synthétiquement dans ce qui s'appelle le tableau de Butcher de la méthode). L'exemple sans doute le plus utilisé est le suivant.

Quadrature de Simpson (exacte pour l'intégration de polynômes de degré inférieur ou égal à 3)

$$X(t_{n+1}) \simeq X(t_n) + \frac{t_{n+1} - t_n}{6} \left(f(t_n, X(t_n)) + 4f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, X\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) + f(t_{n+1}, X(t_{n+1})) \right)$$

À la manière des méthodes précédemment décrites, pour rendre cette quadrature explicite, des évaluations intermédiaires sont employées sur la base de méthodes d'ordre inférieur :

↳ **Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4**

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, y_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} k_1\right) \\ k_3 &= f\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}, y_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{2} k_2\right) \\ k_4 &= f(t_{n+1}, y_n + (t_{n+1} - t_n) k_3) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{t_{n+1} - t_n}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

Remarque

Une autre possibilité pour dériver des méthodes numériques est de considérer une récurrence d'ordre supérieur, de sorte à obtenir y_{n+1} à partir de y_n et y_{n-1} par exemple. On parle alors de **méthode multipas**. Elles peuvent être explicites ou implicites. Une spécificité absente des situations précédentes est que ces méthodes requièrent une initialisation adaptée (multiple). Le problème de Cauchy ne fournissant l'information qu'à l'instant initial, il ne suffit pas à lui seul à initialiser la récurrence du schéma. On utilise alors par exemple des méthodes à un pas pour définir les multiples initialisations, introduisant ainsi une erreur numérique initiale contrôlée. Enfin, d'autres stratégies plus élaborées permettent d'ajuster dynamiquement le pas h (subdivision non-uniforme) ou de l'optimiser en tenant compte d'estimations d'erreurs, on parle de **stratégies de pas adaptatif**.

3. Méthode d'Euler explicite pour une EDO linéaire

Afin de dégager les ingrédients qui permettront une analyse générale, examinons dans un premier temps une preuve élémentaire de convergence obtenue dans le cas volontairement simpliste de la méthode d'Euler explicite à pas constant, appliquée à la résolution de l'équation différentielle linéaire scalaire à coefficient constant $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} X(0) &= X_0 \in \mathbb{C}, \\ X'(t) &= \lambda X(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

L'algorithme d'approximation retenu est ainsi le suivant :

$$y_0 = X_0, \\ y_{n+1} = y_n + \lambda h y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lemme 2

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

Démonstration. Exercice élémentaire. ■

3.a. Calculs élémentaires

Les deux problèmes discrets et continus précédents se résolvent explicitement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = (1 + \lambda h)^n y_0, \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad X(t) = e^{\lambda t} X_0.$$

En vue d'obtenir une convergence ponctuelle, fixons un instant $t \in [0, T]$ fixé et pour toute valeur de $h > 0$ suffisamment petite, un entier n_h vérifiant $h n_h \in [0, T]$ avec de plus $\lim_{h \rightarrow 0} h n_h = t$. Pour ce faire, on peut par exemple fixer n_h comme étant la partie entière de t/h .

On obtient :

$$\forall h > 0, \quad y_{n_h} = \exp(n_h \ln(1 + \lambda h)) y_0 = \exp(\lambda h n_h + o(h n_h)) y_0,$$

et donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_{n_h} = \exp(\lambda t) y_0 = X(t).$$

Ceci témoigne de la convergence de la solution numérique vers la solution exacte au sens où, avec des notations un peu plus imprécises,

$$\forall t \in [0, T], \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t_n \rightarrow t}} y_n = X(t).$$

Il demeure remarquable que la limite ne dépende pas du choix précis de la famille d'entier $(n_h)_{h>0}$ mais seulement de la limite $\lim_{h \rightarrow 0} h n_h = t$. Nous allons, un peu plus systématiquement, démontrer une version plus uniforme de la convergence au sens où

$$E(h) = \max_{0 \leq t_n \leq T} |X(t_n) - y_n| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

3.b. Mise en place de la preuve générale

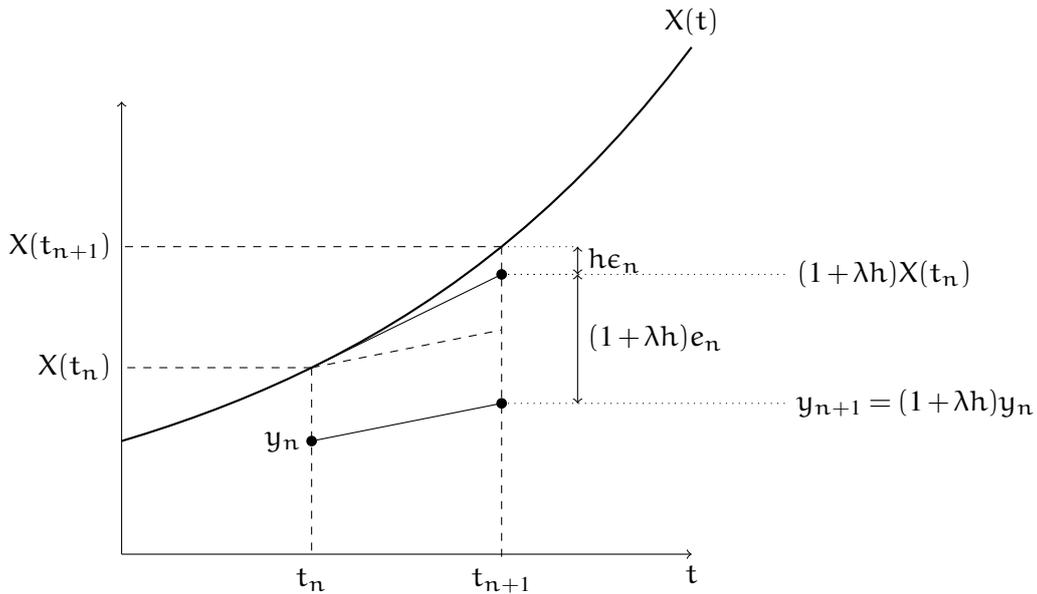
Nous introduisons pour tout entier naturel n , l'erreur $e_n = X(t_n) - y_n$ commise à l'instant t_n pour un pas h donné.

Évolution de (e_n) . En utilisant la forme intégrale (\mathcal{C}_f) de l'équation différentielle d'une part et la définition du schéma d'Euler explicite d'autre part, on obtient une relation de récurrence sur la suite (e_n) :

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= X(t_{n+1}) - y_{n+1} = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} X'(\tau) d\tau - y_n - (t_{n+1} - t_n) \lambda y_n \\ &= X(t_n) - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda (X(\tau) - y_n) d\tau \\ &= X(t_n) - y_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda (X(t_n) - y_n) d\tau + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \lambda (X(\tau) - X(t_n)) d\tau \\ &= (1 + \lambda h) e_n + h \epsilon_n. \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne permet de séparer l'erreur en trois contributions :

1. l'erreur e_n présente à l'instant t_n ,
2. une seconde erreur $\lambda h e_n$ directement liée à la précédente, mais ayant subi l'effet d'une itération du schéma entre les instants t_n et t_{n+1} ,
3. la troisième erreur ne concerne que la solution exacte de l'EDO et la quadrature sur laquelle repose le schéma numérique. Elle est notée ici $h\epsilon_n$ et est couramment appelée **erreur de troncature locale**.



Hormis en présence d'erreurs sur la donnée initiale (et d'erreurs d'arrondis dans les calculs effectifs en machine), l'erreur de troncature locale est la seule responsable de ce que y_n peut différer de $X(t_n)$ pour $n > 0$. Il est donc essentiel de la quantifier.

Estimation de e_n . À l'aide de la formule d'erreur de la quadrature élémentaire des rectangles à gauche, en posant $\phi(\tau) = \lambda(X(\tau) - X(t_n))$, on obtient

$$h|e_n| = \left| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi(\tau) d\tau \right| \leq \frac{1}{2}(t_{n+1} - t_n)^2 \sup_{[t_n, t_{n+1}]} |\phi'| \leq Ch^2,$$

où la constante C ne dépend que de la solution exacte X et de T , tant que $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, mais est indépendante du pas h .

Répercussions sur e_n .

Lemme 3 Grönwall discret

Soient $(e_n)_{n \geq 0}, (\delta_n)_{n \geq 0}$ deux suites de réels positifs vérifiant, pour une certaine constante $K > 0$ et pour tout $n \geq 0$, l'inégalité

$$e_{n+1} \leq (1 + K)e_n + \delta_n.$$

Alors on a pour tout $n \geq 0$:

$$e_n \leq e^{nK} e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(n-1-i)K} \delta_i$$

Démonstration. La démonstration repose sur la seule inégalité $1 + x \leq e^x$, valable pour $x = K > 0$, et une récurrence sur n . ■

Remarque

De façon un peu plus générale, la formule de Duhamel discrète généralise au cas de coefficients "variables" le résultat précédent. Si pour tout $n \geq 0$

$$e_{n+1} \leq (1 + K(t_{n+1} - t_n))e_n + \delta_n,$$

alors pour tout $n \geq 0$:

$$e_n \leq e^{K(t_n - t_0)} e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{K(t_n - t_{i+1})} \delta_i.$$

Dans notre circonstance, ce lemme permet d'obtenir pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $h > 0$ tels que $nh \in [0, T]$, l'inégalité

$$|e_n| \leq e^{|\lambda|nh} |e_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{|\lambda|(n-i-1)h} h |\epsilon_i| \leq e^{|\lambda|nh} (|e_0| + Cnh^2) \leq e^{|\lambda|T} (|e_0| + CTh),$$

Ainsi si la donnée initiale du schéma est $y_0 = X_0$, alors $e_0 = 0$ de sorte que le résultat suivant est démontré.

Proposition 4 Convergence

Pour la résolution de l'EDO linéaire $X' = \lambda X$, la suite d'approximations obtenues par la méthode d'Euler explicite, initialisées sur la donnée de Cauchy considérée ($y_0 = X_0$), est convergente d'ordre 1 :

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |X(t_n) - y_n| \leq CTe^{|\lambda|T} h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

4. Convergence des schémas consistants et stables

Après avoir traité l'exemple linéaire introductif précédent, nous présentons l'analyse générale de convergence des méthodes à un pas, dans la situation générale d'un problème de Cauchy (C) dont on approche la solution maximale sur $[0, T]$ par un schéma mis sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{aligned} y_0 &= X_0 \\ y_{n+1} &= y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), \quad 0 \leq n \leq N(h) - 1. \end{aligned}$$

La fonction Φ rend compte des itérations du schéma.

Exemple

- Le schéma d'Euler explicite correspond à $\Phi(t, y; h) = f(t, y)$.
- Le schéma de Heun correspond à $\Phi(t, y; h) = \frac{1}{2}(f(t, y) + f(t + h, y + hf(t, y)))$.
- Pour les schémas implicites, le théorème des fonctions implicites peut permettre de justifier la mise

sous la forme "explicite" précédente, ceci sous certaines conditions, notamment de petitesse sur le pas $h > 0$ et de lipschitzianité de f .

4.a. Consistance

Pour coordonner le schéma numérique à l'EDO considérée, il faut établir le lien qui doit unir Φ à f . Si l'on injecte la solution exacte de l'EDO dans le schéma numérique, un nouveau terme $\epsilon_n(h)$ va rendre compte du fait qu'elle n'est pas exactement solution du schéma :

$$\frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{h} = \Phi(t_n, X(t_n); h) + \epsilon_n(h),$$

et d'autre part, lorsque t_{n+1} est suffisamment proche de t_n , la solution X étant de classe \mathcal{C}^1 :

$$\frac{X(t_{n+1}) - X(t_n)}{h} = X'(t_n) + O(h) = f(t_n, X(t_n)) + O(h).$$

On s'attend donc formellement à devoir requérir la limite $\Phi(t, X; h) \rightarrow f(t, X)$ lorsque h tend vers 0. Cette propriété est vérifiée pour les exemples précédents. La propriété de **consistance** suivante sera l'ingrédient rigoureux permettant l'analyse.

Définition 5 Consistance

Associée à la solution exacte X sur $[0, T]$ de (\mathcal{C}) et au schéma numérique Φ envisagé, on définit pour tout $h > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tels que $nh \in [0, T]$, l'**erreur de consistance locale** (ou erreur de troncature locale) à l'instant $t_n = nh$ comme étant la quantité notée $\epsilon_n(h)$ définie par l'égalité

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + h(\Phi(t_n, X(t_n); h) + \epsilon_n(h)).$$

On définit alors l'**erreur de consistance globale** :

$$\epsilon(h) = \max_{0 \leq t_n \leq T} |\epsilon_n(h)|.$$

Le schéma est dit **consistant** si la quantité $\epsilon(h)$ tend vers 0, lorsque h tend vers 0.

On appelle **ordre de consistance** l'entier maximal p tel que $\epsilon(h) = O(h^p)$ (la solution X étant supposée suffisamment régulière).

Remarque

Dans certains ouvrages de la littérature, la propriété de consistance est définie à travers la condition moins restrictive suivante :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left[h \sum_{0 \leq t_n \leq T} |\epsilon_n(h)| \right] = 0.$$

Cette quantité est celle qui précisément intervient dans le lemme de Grönwall discret et suffit à mettre en place la preuve de convergence ultérieure.

Exemple (Utilisation de l'erreur de quadrature)

Schéma d'Euler explicite :

$$h\epsilon_n(h) = X(t_{n+1}) - X(t_n) - hf(t_n, X(t_n)) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, X(\tau)) d\tau - hf(t_n, X(t_n))$$

L'erreur dans la quadrature des rectangles à gauche permet d'obtenir $|\epsilon_n(h)| \leq C_e h$, où la constante C_e ne

dépend que du problème de Cauchy considéré et de l'intervalle $[0, T]$. Le schéma est ainsi consistant d'ordre 1.

Schéma de Crank-Nicolson :

$$\begin{aligned} h\epsilon_n(h) &= X(t_{n+1}) - X(t_n) - \frac{h}{2}(f(t_n, X(t_n)) + f(t_{n+1}, X(t_{n+1}))) \\ &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, X(\tau)) d\tau - \frac{h}{2}(f(t_n, X(t_n)) + f(t_{n+1}, X(t_{n+1}))) \end{aligned}$$

Supposons la solution X de classe C^2 sur $[0, T]$, alors $|\epsilon_n(h)| \leq Ch^2$. Le schéma est ainsi consistant d'ordre 2.

Schéma de Heun :

Très proche du schéma précédent, on peut préciser de quelle manière en écrivant :

$$\begin{aligned} h\epsilon_n(h) &= X(t_{n+1}) - X(t_n) - \frac{h}{2}(f(t_n, X(t_n)) + f(t_{n+1}, X(t_{n+1}))) \\ &\quad + \frac{h}{2}(f(t_{n+1}, X(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, X(t_n) + hf(t_n, X(t_n)))). \end{aligned}$$

Ainsi apparaît l'erreur de Crank-Nicolson, additionnée d'un terme qui correspond à l'erreur de la méthode d'Euler explicite "vue" à travers f (itération soulignée), issue de l'étape de prédiction. Le caractère Λ -lipschitzien de f donne alors

$$|f(t_{n+1}, X(t_{n+1})) - f(t_{n+1}, X(t_n) + hf(t_n, X(t_n)))| \leq \Lambda h^2 C_e,$$

où C_e désigne la constante d'erreur de la méthode d'Euler explicite. On en déduit ensuite par inégalité triangulaire $|\epsilon_n(h)| \leq (C + \frac{\Lambda}{2} C_e)h^2$. Le schéma de Heun est consistant d'ordre 2.

4.b. Stabilité

Remarque (Vocabulaire)

On prendra garde que dans ce contexte, la dénomination *stabilité* ne fait pas référence à la notion de stabilité envisagée dans le cadre de l'étude qualitative des solutions d'un système différentiel. C'est ici une notion propre à la méthode d'approximation des solutions de ce système différentiel, parfois appelé également "zéro-stabilité" (h tend vers 0) dans la littérature spécialisée.

Définition 6 Stabilité

Le schéma est dit stable si, étant données u et v les solutions numériques respectivement obtenues par les récurrences

$$\begin{aligned} u_0 &= y^0 \\ u_{n+1} &= u_n + h \Phi(t_n, u_n; h), \quad t_n \in [0, T], \end{aligned}$$

et une version perturbée

$$\begin{aligned} v_0 &= y^0 + \delta_0 \\ v_{n+1} &= v_n + h \Phi(t_n, v_n; h) + h \delta_{n+1}, \quad t_n \in [0, T], \end{aligned}$$

où $(\delta_n)_{n \geq 0}$ est une **suite arbitraire de perturbations**, la propriété suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \exists h_0 > 0, \exists C > 0, \forall h \in]0, h_0], \\ \forall \epsilon \in]0, 1], \forall \delta, \|\delta\|_\infty \leq \epsilon \Rightarrow \|v - u\|_\infty \leq C\|\delta\|_\infty. \end{aligned}$$

En termes simples, la propriété de stabilité est une propriété de continuité de la solution numérique par rapport à une petite perturbation δ , mais uniforme en h au voisinage de 0. C'est un ingrédient essentiel dans la convergence de la solution numérique vers la solution exacte lorsque h tend vers 0 car elle garantit que les erreurs de consistance, malgré leur petitesse (par exemple en $O(h)$), ne vont pas asymptotiquement induire une perturbation qui nuirait à la convergence (erreur en $O(1)$). Elle garantit également que le schéma est utilisable en arithmétique approchée, en présence d'erreurs d'arrondis.

4.c. Critère suffisant de stabilité des méthodes à un pas

Il subsiste la question de savoir démontrer qu'un schéma est zéro-stable ou ne l'est pas. La proposition suivante donne une condition suffisante sur Φ .

Proposition 7

Si Φ est lipschitzienne en la variable y avec une constante de Lipschitz Λ indépendante de h et de $t \in [0, T]$, c'est-à-dire :

$$\exists h_0 > 0, \forall h \in]0, h_0], \forall t \in [0, T], \forall (y_1, y_2) \in \Omega^2, \quad |\Phi(t, y_1, h) - \Phi(t, y_2, h)| \leq \Lambda |y_1 - y_2|,$$

alors le schéma est stable.

Démonstration. Considérons les notations de la définition précédente et posons $w_n = v_n - u_n$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } t_n \in [0, T], \quad w_{n+1} = w_n + h(\Phi(t_n, v_n; h) - \Phi(t_n, u_n; h)) + h\delta_{n+1},$$

et donc par l'inégalité triangulaire et la Λ -lipschitzianité de Φ en y , uniforme en les autres variables :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } t_n \in [0, T], \quad |w_{n+1}| \leq (1 + \Lambda h)|w_n| + h|\delta_{n+1}|.$$

Le **lemme de Gronwall discret** permet d'en déduire

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \text{ t.q. } t_n \in [0, T], \quad |w_n| &\leq e^{\Lambda n h} |w_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{\Lambda(n-i-1)h} h |\delta_{i+1}| \\ &\leq e^{\Lambda T} |\delta_0| + \sum_{i=0}^{N(h)-1} e^{\Lambda(N-1-i)h} h \epsilon \\ &\leq e^{\Lambda T} (|\delta_0| + T\epsilon) \leq e^{\Lambda T} (1 + T)\epsilon. \end{aligned}$$

La constante $C = e^{\Lambda T} (1 + T)$ est finalement bien indépendante de h et de ϵ et de l'entier n du moment que $t_n \in [0, T]$ et on a ainsi démontré la propriété de stabilité. ■

Exemple

Le schéma d'Euler explicite est stable du moment que la fonction f est globalement lipschitzienne en X sur $[0, T] \times \Omega$.

5. Convergence des schémas consistants et stables

Forts de ces notions de consistance et de stabilité, l'analyse de convergence de l'exemple initial, concernant la méthode d'Euler explicite appliquée à une équation linéaire, se généralise sans peine au cas général.

Théorème 8

Un schéma numérique de la forme

$$\begin{aligned}y_0 &= X_0 \\ y_{n+1} &= y_n + h \Phi(t_n, y_n; h), \quad 0 \leq t_n \leq T.\end{aligned}$$

est convergent (i.e. $E(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$) si et seulement si il est stable et consistant. De plus l'ordre de convergence est l'ordre de consistance.

Démonstration. La solution numérique (y_n) est solution du schéma avec perturbation nulle, tandis que la solution exacte $(y(t_n))$ est solution de ce même schéma pour une perturbation qui n'est autre que l'erreur de consistance. Ainsi si on pose

$$\forall n, \quad u_n = y_n, \quad v_n = X(t_n),$$

on a pour $\delta_{n+1} = \epsilon_n(h)$, et $\delta_0 = y_0 - X_0 = 0$:

$$\begin{aligned}v_0 &= X_0 + \delta_0 \\ v_{n+1} &= v_n + h \Phi(t_n, v_n; h) + h \delta_{n+1}, \quad 0 \leq t_n \leq T.\end{aligned}$$

Les propriétés de stabilité et de consistance garantissent que si h est assez petit, alors $\|\delta\|_\infty = O(h^p)$ est assez petit, de sorte que

$$\|u - v\|_\infty = E(h) \leq CO(h^p).$$

■

Références

- [1] Michel CROUZEIX, Alain MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.
- [2] Jean-Pierre DEMAILLY, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.
- [3] Alfio QUARTERONI, Riccardo SACCO, Fausto SALERI, *Méthodes numériques. Algorithmes, analyse et applications*, Springer, Milan, 2007.
- [4] Michelle SCHATZMAN, *Analyse numérique : une approche mathématique : cours et exercices*, Dunod, 2001.