

# Densité de demi-horocycles sur une surface hyperbolique géométriquement infinie

Barbara Schapira

2 mars 2011

*LAMFA, Université Picardie Jules Verne, 33 rue St Leu, 80000 Amiens, France*

1

## Résumé

On the unit tangent bundle of a hyperbolic surface, we study the density of positive orbits  $(h^s v)_{s \geq 0}$  under the horocyclic flow. More precisely, given a full orbit  $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ , we prove that under a weak assumption on the vector  $v$ , both half-orbits  $(h^s v)_{s \geq 0}$  and  $(h^s v)_{s \leq 0}$  are simultaneously dense or not in the nonwandering set  $\mathcal{E}$  of the horocyclic flow. We give also a counter-example to this result when this assumption is not satisfied.

## 1 Introduction

Hedlund [H] a démontré que sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique de volume fini, toutes les orbites positives non périodiques  $(h^s v)_{s \geq 0}$  du flot horocyclique sont denses.

Par ailleurs, on a maintenant un critère géométrique complet (voir [Da] pour un résultat général et des références) pour savoir si, sur une surface hyperbolique quelconque, un horocycle  $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$  est dense dans l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du flot horocyclique ou non. Il l'est si et seulement si  $v$  est *horosphérique* (voir paragraphe 3).

Une question naturelle du point de vue dynamique est de savoir si lorsqu'un tel horocycle complet est dense, les demi-horocycles  $(h^s v)_{s \geq 0}$  et  $(h^s v)_{s \leq 0}$  le sont tous les deux.

Hedlund avait un résultat positif partiel, sur les surfaces dites « de première espèce », pour les vecteurs *radiaux*, i.e. les vecteurs  $v$  dont la géodésique revient infiniment souvent dans un compact.

Dans [Scha], j'ai traité le cas des surfaces hyperboliques géométriquement finies (i.e. dont le groupe fondamental est de type fini), et j'ai montré que la réponse est toujours positive, i.e. les deux demi-horocycles  $(h^s v)_{s \geq 0}$  et  $(h^s v)_{s \leq 0}$  sont toujours denses (ou non) simultanément, hormis dans le cas (obstruction triviale, voir figure 1) de vecteurs  $v$  dont l'un des demi-horocycles  $(h^s v)_{s \geq 0}$  et  $(h^s v)_{s \leq 0}$  est dense dans  $\mathcal{E}$ , et l'autre sort de tout compact.

Dans cette note, j'obtiens un panorama presque complet de la situation, sur des surfaces hyperboliques orientées quelconques.

Introduisons quelques définitions et notations. Soit  $S$  une surface hyperbolique orientée. Elle peut s'écrire  $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ , où  $\Gamma$  est un groupe discret d'isométries du disque hyperbolique  $\mathbb{D}$ , et  $T^1 S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ . Si  $u \in T^1 S$ , et  $\tilde{u}$  est un relevé de  $u$  au fibré unitaire tangent  $T^1 \mathbb{D}$  du disque hyperbolique, nous notons  $u^- \in S^1$  (resp.  $u^+$ )

---

<sup>1</sup>37A40,37A17, 37B99, 37D40

l'extrémité négative (resp. positive) de la géodésique  $(g^t \tilde{u})_{t \in \mathbb{R}}$  définie par  $\tilde{u}$  dans le bord à l'infini  $S^1 = \partial \mathbb{D}$  du disque hyperbolique. L'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma \subset S^1$  est l'ensemble  $\overline{\Gamma.o} \setminus \Gamma.o$  des points d'accumulation d'une orbite dans le bord. Dans toute cette note,  $\Gamma$  est supposé non-élémentaire, i.e. non virtuellement abélien, ce qui revient à dire que  $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$ . Nous aurons besoin d'orienter le bord  $S^1$  dans le sens trigonométrique.

Un horocycle est un cercle (euclidien) de  $\mathbb{D}$  tangent à  $\partial \mathbb{D}$ . Un horocycle instable est l'ensemble des vecteurs unitaires orthogonaux à un horocycle donné, pointant vers l'extérieur. Nous étudions ici le *flot horocyclique instable*. Ce flot, agissant sur  $T^1 \mathbb{D}$ , a pour orbites les horocycles instables, et il tourne les vecteurs d'une distance  $|s|$  (pour la distance riemannienne induite) sur l'horocycle instable, dans le sens des aiguilles d'une montre. Ce flot passe au quotient en le flot horocyclique instable de  $T^1 S$ .

Un vecteur  $v \in T^1 S$  est dit *radial* si sa géodésique  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  revient infiniment souvent dans un compact (ici,  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  désigne le flot géodésique, qui déplace les vecteurs d'une distance  $t$  le long de la géodésique qu'ils définissent). Il est bien connu que si  $v$  est radial, son horocycle  $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$  est dense dans l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du flot horocyclique, i.e. l'ensemble  $\mathcal{E}$  des vecteurs de  $T^1 S$  dont tout voisinage  $V$  vérifie  $h^{s_n} V \cap V \neq \emptyset$  pour une suite  $s_n \rightarrow +\infty$ . (C'est l'ensemble sur lequel se produit la dynamique intéressante.)

Le résultat d'Hedlund s'étend alors :

**Théorème 1.1** *Soit  $S$  une surface hyperbolique non élémentaire orientée. Soit  $v \in T^1 S$  un vecteur radial. Alors son demi-horocycle positif  $(h^s v)_{s \geq 0}$  est dense dans l'ensemble non errant  $\mathcal{E}$  du flot horocyclique si et seulement si  $v^-$  n'est pas le premier point (dans le sens trigonométrique) d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ .*

Le résultat ci-dessus est énoncé et démontré car sa preuve est simple et assez courte, et reprend en les simplifiant des idées d'Hedlund. Mais je démontre ensuite un résultat bien plus général.

**Théorème 1.2** *Soit  $S$  une surface hyperbolique non élémentaire orientée. Soit  $v$  un vecteur dont l'horocycle complet  $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$  est dense dans  $\mathcal{E}$ , et tel qu'il existe deux constantes  $\Lambda > 0$  et  $0 < \alpha_0 \leq \pi/2$ , telles que le rayon géodésique  $(\pi(g^{-t}v))$ ,  $t \geq 0$ , croise une infinité de géodésiques fermées de longueur au plus  $\Lambda$ , avec un angle d'intersection au moins  $\alpha_0$ . Alors les deux demi-orbites  $(h^s v)_{s \geq 0}$  et  $(h^s v)_{s \leq 0}$  sont denses dans  $\mathcal{E}$ .*

Un vecteur radial satisfait cette hypothèse, car les géodésiques fermées sont denses dans  $\mathcal{E}$ , et si  $v$  est radial,  $(g^{-t}v)$  revient infiniment souvent dans une boule fermée de  $\mathcal{E}$ . On peut se convaincre que l'hypothèse du théorème 1.2 est alors vérifiée, par exemple à l'aide d'une décomposition en pantalons de la surface.

Il est à noter qu'une hypothèse très proche est utilisée dans un travail récent d'Omri Sarig [Sa] sur le flot horocyclique.

On peut se demander si ce résultat est optimal. Nous construisons un contre-exemple à un résultat complètement général.

**Théorème 1.3** *Il existe des surfaces hyperboliques non élémentaires orientées contenant des vecteurs  $v$  tels que  $(h^s v)_{s > 0}$  est dense dans  $\mathcal{E}$ ,  $(h^s v)_{s < 0}$  ne l'est pas,  $v^-$  n'est pas une extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ , et  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur tendant vers l'infini.*

Suivant les exemples, l'angle d'intersection de  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  avec ces géodésiques fermées peut être uniformément minoré ou tendre vers 0.

Le paragraphe 2 est consacré aux préliminaires, et les trois paragraphes suivants aux démonstrations des trois résultats ci-dessus.

Je remercie Yves Coudène et Antonin Guilloux pour des discussions utiles liées à ce travail.

## 2 Préliminaires

### Géométrie hyperbolique

Le disque hyperbolique  $\mathbb{D} = D(0,1)$  est muni de la métrique hyperbolique  $\frac{4dx^2}{(1-|x|^2)^2}$ . Soit  $o$  l'origine du disque, et  $\pi : T^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  la projection canonique. Le bord à l'infini de  $\mathbb{D}$  est  $S^1 = \partial\mathbb{D}$ . On note indifféremment  $d$  la distance riemannienne sur  $\mathbb{D}$  et  $T^1\mathbb{D}$ .

L'identification classique de  $\mathbb{D}$  avec  $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  via l'homographie  $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$  permet d'identifier le groupe des isométries préservant l'orientation de  $\mathbb{D}$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$  agissant par homographies sur  $\mathbb{H}$ . Cette action s'étend à  $T^1\mathbb{D}$  (ou  $T^1\mathbb{H}$ ), et devient simplement transitive; on identifie donc  $T^1\mathbb{D}$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Si  $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$  est un groupe discret, son *ensemble limite*  $\Lambda_\Gamma$  est défini comme  $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma.o} \setminus \Gamma.o \subset S^1$ . C'est également le plus petit fermé  $\Gamma$ -invariant non vide de  $S^1$ . Nous utiliserons souvent le fait que l'action de  $\Gamma$  sur  $\Lambda_\Gamma$  est minimale : pour tout  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ ,  $\Gamma.\xi$  est dense dans  $\Lambda_\Gamma$ .

Un point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est dit *radial* s'il est limite d'une suite  $(\gamma_n.o)$  de points de  $\Gamma.o$  qui restent à distance hyperbolique bornée du rayon géodésique  $[o\xi]$  reliant  $o$  à  $\xi$ . Nous noterons  $\Lambda_{\text{rad}}$  l'*ensemble limite radial*. L'ensemble des points de  $\Lambda_\Gamma$  fixés par une isométrie hyperbolique de  $\Gamma$  est inclus dans  $\Lambda_{\text{rad}}$ .

Un *horocycle* de  $\mathbb{D}$  est un cercle euclidien tangent à  $S^1$ ; c'est également une ligne de niveau d'une fonction de Busemann. Une *horoboule* est un disque (euclidien) bordé par un horocycle. Un point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est *horosphérique* si toute horoboule centrée en  $\xi$  contient une infinité de points de  $\Gamma.o$ . En particulier,  $\Lambda_{\text{rad}}$  est inclus dans l'ensemble des points limites horosphériques, noté  $\Lambda_{\text{hor}}$ .

Une isométrie de  $PSL(2, \mathbb{R})$  est dite *hyperbolique* si elle fixe exactement deux points de  $S^1$ , *parabolique* si elle fixe exactement un point de  $S^1$ , et *elliptique* dans les autres cas. On note  $\Lambda_p \subset \Lambda_\Gamma$  l'ensemble des points limites *paraboliques*, i.e. les points fixes d'une isométrie parabolique de  $\Gamma$ .

Toute surface hyperbolique orientée est le quotient  $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$  de  $\mathbb{D}$  par un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $PSL(2, \mathbb{R})$  sans élément elliptique, et son fibré unitaire tangent  $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$  s'identifie à  $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ .

Dans cette note, nous supposons toujours  $\Gamma$  *non élémentaire*, i.e.  $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$ .

Quand  $S$  est compacte, alors  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} = S^1$ . La surface est dite *convexe-cocompacte* quand  $\Gamma$  est finiment engendré et ne contient que des isométries hyperboliques. Dans ce cas,  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}}$  est strictement inclus dans  $S^1$ , et  $\Gamma$  agit de manière cocompacte sur l'ensemble  $(\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diagonale} \times \mathbb{R} \subset T^1\mathbb{D}$ . Quand  $S$  est de volume fini, ses bouts sont uniquement des pointes isométriques à  $\{z \in \mathbb{H}, |z| > 1\} / \langle z \mapsto z + 1 \rangle$ , et  $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \sqcup \Lambda_p = S^1$ .

### Flots géodésique et horocyclique

Une géodésique hyperbolique de  $\mathbb{D}$  est un diamètre ou un demi-cercle orthogonal à  $S^1$ . Un vecteur  $v \in T^1\mathbb{D}$  est tangent à une unique géodésique, et orthogonal à exactement deux horocycles passant par son point base, tangents à  $S^1$  respectivement en  $v^+$  et  $v^-$ . L'ensemble des vecteurs  $w \in T^1\mathbb{D}$  tq  $w^- = v^-$  et dont le point base appartient à ce dernier horocycle est l'*horocycle fortement instable*, ou variété

fortement instable, de  $v$ . On le note donc  $W^{su}(v) = \{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$ . L'*horocycle fortement stable* est défini de manière analogue.

Le *flot géodésique*  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  agit sur  $T^1\mathbb{D}$  en déplaçant un vecteur  $v$  d'une distance  $t$  le long de la géodésique qu'il définit. Dans l'identification de  $T^1\mathbb{D}$  avec  $PSL(2, \mathbb{R})$ , ce flot correspond à l'action par multiplication à droite du sous-groupe à un paramètre

$$\left\{ a_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le *flot horocyclique instable*  $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$  agit sur  $T^1\mathbb{D}$  en déplaçant un vecteur  $v$  d'une distance  $|s|$  le long de son horocycle fortement instable. Il y a deux orientations possibles pour un tel flot, et nous choisissons celle qui correspond à l'action à droite du groupe à un paramètre

$$\left\{ n_s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

sur  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Ce flot fait tourner les vecteurs le long de leur horocycle fortement instable, de sorte que  $\{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$  décrit tout l'horocycle fortement instable.

De plus, pour tout  $s \in \mathbb{R}$  et  $t \in \mathbb{R}$ , ces flots géodésique et horocyclique satisfont la relation fondamentale suivante :

$$g^t \circ h^s = h^{se^t} \circ g^t. \quad (2.1)$$

**Remarque 2.1** Avec notre choix d'orientation de  $S^1$ , quand  $s \rightarrow +\infty$ , si  $u \in T^1\mathbb{D}$  et  $u_s^+ \in S^1$  est l'extrémité positive de la géodésique déterminée par  $h^s u$ , alors  $u_s^+$  converge vers  $u^-$ , avec  $u_s^+ \geq u^-$  dans l'orientation trigonométrique de  $S^1$ .

Ces deux actions à droite commutent avec l'action à gauche de  $PSL(2, \mathbb{R})$  sur lui-même par multiplication, de sorte qu'elles sont bien définies au quotient sur  $T^1S \simeq \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ .

**Définition 2.2** Soit  $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$  un flot agissant par homéomorphismes sur un espace topologique  $X$ . L'ensemble non errant de  $\phi$  est l'ensemble des  $x \in X$  tq pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  tq  $\phi^{t_n} V \cap V \neq \emptyset$ .

Nous renvoyons à [Scha] pour le lemme suivant.

**Lemme 2.3** L'ensemble non-errant du flot géodésique agissant sur  $T^1S$  est

$$\Omega := \Gamma \backslash ((\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diagonal} \times \mathbb{R}).$$

L'ensemble non errant du flot horocyclique agissant sur  $T^1S$  est

$$\mathcal{E} := \Gamma \backslash ((\Lambda_\Gamma \times S^1) \setminus \text{Diagonal} \times \mathbb{R}).$$

On a de plus

$$\mathcal{E} = \cup_{s \in \mathbb{R}} h^s \Omega \quad \text{et} \quad \mathcal{E} = \overline{\cup_{s \geq 0} h^s \Omega}$$

Rappelons que  $W^{su}(v) = \{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$  est compact ssi  $v^- \in \Lambda_p$ , et dense in  $\mathcal{E}$  ssi  $v^- \in \Lambda_{\text{hor}}$ . Notons  $W_+^{su}(v) = \{h^s v, s \geq 0\}$  le demi horocycle positif de  $v$ .

Nous supposons dans tout ce qui suit que  $S^1$  est orienté dans le sens trigonométrique.

## Trompettes

Rappelons (voir par exemple [Scha]) les faits standards suivants.

**Remarque 2.4** Si la surface  $S$  vue comme  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  a une *trompette* isométrique à  $\{z \in \mathbb{H}, \operatorname{Re}(z) \geq 0\} / \{z \mapsto az\}$ ,  $a > 1$ , la géodésique  $\operatorname{Re}(z) = 0$  passe au quotient en une géodésique périodique bordant la trompette. Une géodésique croisant cette géodésique périodique et entrant dans la trompette n'en ressortira jamais. En particulier, l'ensemble limite  $\Lambda_\Gamma$  vu dans  $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  n'intersecte pas  $\mathbb{R}_+^*$ .

Un horocycle centré dans  $\mathbb{R}_+^*$ , projeté sur  $S$ , restera dans la trompette sauf au plus pendant un intervalle de temps fini. Un horocycle centré en 0, vu dans  $S$ , aura une moitié qui n'entrera pas dans la trompette, et l'autre côté qui restera dans la trompette sans jamais ressortir.

**Fait 2.5** Dans le cas d'une surface hyperbolique géométriquement finie, les extrémités d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$  sont hyperboliques ; ce sont les extrémités de l'axe d'un relevé de la géodésique bordant la trompette. Ce n'est pas nécessairement le cas sur une surface quelconque <sup>(2)</sup>.

**Fait 2.6** Si  $v^- \in \Lambda_\Gamma$  est la première extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ , alors  $W_+^{su}(v) = \{h^s v, s \geq 0\}$  n'est pas dense dans  $\mathcal{E}$ .

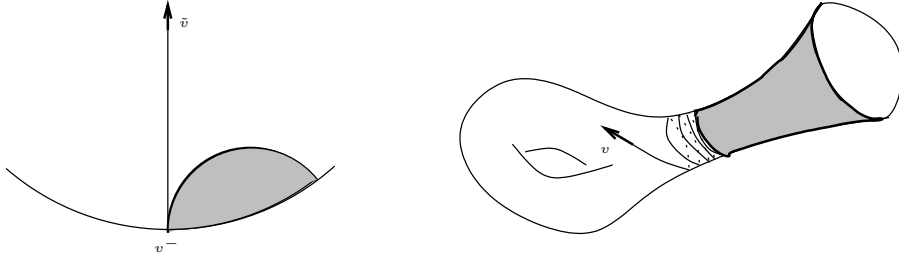


FIG. 1 – Un vecteur  $v$  dont l'horocycle positif  $(h^s v)_{s \geq 0}$  n'est pas dense dans  $\mathcal{E}$

## 3 Démonstration du théorème 1.1

### Points et vecteurs horocycliques à droite

Si  $v \in T^1\mathbb{D}$ , soient  $v^\pm$  ses extrémités dans  $\partial\mathbb{D}$ ,  $Hor(v) \subset \mathbb{D}$  l'horoboule centrée en  $v^-$  et passant par le point base  $\pi(v)$  de  $v$ , et  $Hor^+(v) \subset Hor(v)$  l'ensemble des points base des vecteurs de  $\cup_{t \geq 0} \cup_{s \geq 0} h^s g^{-t} v = \cup_{t \geq 0} \cup_{s \geq 0} g^{-t} h^s v$  (d'après la relation (2.1)).

**Définition 3.1** Si  $v \in T^1\mathbb{D}$ , et  $\alpha > 0$ , le cône de largeur  $\alpha$  autour de  $v$  est l'ensemble  $\mathcal{C}(v, \alpha)$  des points  $x \in Hor(v)$  à distance (hyperbolique) au plus  $\alpha$  du rayon géodésique  $(g^{-t} v)_{t \geq 0}$ . Il s'agit de l'intersection de  $Hor(v)$  avec un cône euclidien.

**Définition 3.2** Un vecteur  $v \in T^1S$  est horocyclique à droite s'il admet un relevé  $\tilde{v} \in T^1\mathbb{D}$ , tel que pour tous  $\alpha > 0$  et  $D > 0$ , l'orbite  $\Gamma.o$  intersecte la partie droite de l'horoboule  $Hor^+(g^{-D}\tilde{v})$  moins le cône  $\mathcal{C}(g^{-D}\tilde{v}, \alpha)$ .

<sup>2</sup>On peut considérer (exemple donné par M. Peigné) pour s'en convaincre le groupe  $\Gamma = \langle \alpha^n h \alpha^{-n}, n \in \mathbb{Z} \rangle$ , où  $h$  et  $\alpha$  sont deux isométries hyperboliques en position Schottky, et  $\alpha \notin \Gamma$ , de sorte que ses points fixes  $\alpha^-$  et  $\alpha^+$  sont les extrémités d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ , sans que cela corresponde à une trompette de la surface quotient.

Un point  $\xi \in \Lambda_\Gamma$  est horocyclique à droite s'il existe  $v \in T^1S$  horocyclique à droite tel que  $\xi = v^-$ .

Pour mémoire rappelons qu'un vecteur  $v$  est horosphérique si toutes les horoboules  $Hor + (g^{-D}v)$  contiennent une infinité de points de  $\Gamma.o$ .

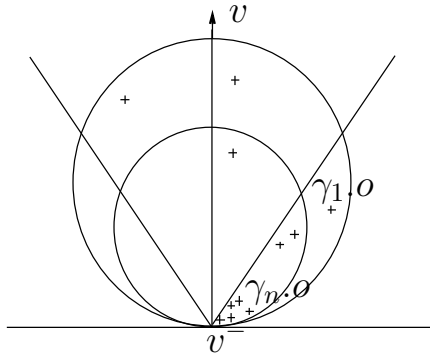


FIG. 2 – Relevé d'un vecteur horocyclique à droite

Rappelons la proposition

**Proposition 3.3 ([Scha])** *Soit  $S$  une surface hyperbolique. Un vecteur  $v \in T^1S$  est horocyclique à droite si et seulement si  $(h^s v)_{s \geq 0}$  est dense dans  $\mathcal{E}$ .*

Rappelons également la proposition suivante.

**Proposition 3.4 ([Scha])** *Soit  $S$  une surface hyperbolique orientée. Si  $p \in \Omega$  est un vecteur périodique pour le flot géodésique, son demi-horocycle positif  $(h^s(p))_{s \geq 0}$  est dense dans l'ensemble non-errant  $\mathcal{E}$  du flot horocyclique ssi  $p^-$  n'est pas la première extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ .*

**Théorème 3.5 (Hedlund, [H], thm 4.2)** *Soit  $S = \Gamma \setminus \mathbb{D}$  une surface hyperbolique orientée de première espèce, i.e. tq  $\Lambda_\Gamma = S^1$ . Soit  $v \in T^1S$  tq  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  revient infiniment souvent dans un compact, i.e. tq  $v^- \in \Lambda_{\text{rad}}$ . Alors son demi-horocycle positif  $(h^s v)_{s \geq 0}$  est dense dans  $T^1S$ .*

### 3.1 Démonstration du théorème 1.1

Nous allons démontrer qu'un vecteur radial  $v \in T^1S$  tel que  $v^-$  n'est pas la première extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$  est horosphérique à droite. Pour ne pas alourdir les notations, en l'absence d'ambiguïté, nous noterons encore  $v$  un relevé de  $v$  à  $T^1\mathbb{D}$ . Soient donc  $R > 0$  et  $D > 0$  deux constantes assez grandes. Montrons que  $\#\Gamma.o \cap Hor^+(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R) = +\infty$ .

- Comme  $v$  est radial, il existe  $R_0$ , et une suite  $\gamma_n.o \rightarrow v^-$ , telle que  $d(\gamma_n.o, (v^-, v]) \leq R_0$ . Soit  $g^{-t_n}v$ ,  $t_n \rightarrow +\infty$ , une suite de vecteurs de la géodésique à distance au plus  $R_0$  de  $\gamma_n.o$ . En faisant agir  $\gamma_n^{-1}$ , on obtient une suite de vecteurs  $\gamma_n^{-1}g^{-t_n}v$ , tous dans le fibré unitaire tangent  $T^1B(o, R_0)$  de la boule  $B(o, R_0)$ . Quitte à extraire, cette suite converge vers un vecteur  $w_\infty \in T^1B(o, R_0)$ , d'extrémités  $w_\infty^\pm \in \partial\mathbb{D}$ .

Remarquons au passage (voir figure 3) que  $\gamma_n^{-1}.v^- \rightarrow w_\infty^-$ , et que le demi horocycle de  $\mathbb{D}$   $\pi(\gamma_n^{-1} \cup_{s \geq 0} h^s v)$  converge (au sens de la convergence de Hausdorff des fermés de  $\overline{\mathbb{D}}$ ) vers le demi-cercle  $[w_\infty^-, w_\infty^+]$  du bord (orienté dans le sens trigonométrique).

- Comme  $v^-$  n'est pas la première extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ , et que les  $\gamma_n$  préservent l'orientation, on vérifie aisément que  $w_\infty^-$  n'est pas non plus la première extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ .

- Choisissons maintenant une isométrie hyperbolique  $h \in \Gamma$ , de points fixes  $h^\pm \in \Lambda_\Gamma$  tous deux situés dans l'intervalle  $[w_\infty^-, w_\infty^+]$ , à droite donc de  $w_\infty^-$ , proches de  $w_\infty^-$ . L'axe de  $h$  se projette sur  $S$  en une géodésique périodique. Soit  $D_0 > 0$  la distance de cette géodésique au projeté de l'origine  $o$  du disque  $\mathbb{D}$ .

Quitte à conjuguer  $h$  par une autre isométrie hyperbolique ayant l'un de ses points fixes à droite de  $w_\infty^-$ , il est possible de supposer que l'axe  $(h^-, h^+)$  de l'isométrie est à distance supérieure à  $2R + R_0 + D_0$  de la géodésique  $(w_\infty^-, w_\infty^+)$ .

- Comme le demi-horocycle  $\pi(\cup_{s \geq 0} h^s \gamma_n^{-1} v)$  converge vers  $[w_\infty^-, w_\infty^+]$  (au sens de la convergence de Hausdorff des fermés de  $\mathbb{D}$ ), pour  $n$  assez grand, ce demi-horocycle intersecte la géodésique  $(h^- h^+)$  en deux points  $x_n^-, x_n^+$ , avec  $d(x_n^-, x_n^+) \rightarrow \infty$ .

On voit également que le point, disons  $y_n$ , du segment géodésique  $[x_n^-, x_n^+]$  le plus loin de l'horocycle  $\pi(\cup_{s \geq 0} h^s \gamma_n^{-1} v)$  voit sa distance à cet horocycle tendre vers l'infini avec  $n$ . Or ce point est à distance au plus  $D_0$  d'un point de l'orbite  $\Gamma.o$ , que nous notons  $g_n.o$ . Autrement dit, pour  $n$  assez grand,  $g_n.o$  est dans l'horoboule  $Hor^+(g^{-D} \gamma_n^{-1} v)$ .

Le point  $y_n$  est sur  $(h^- h^+)$ , donc à distance au moins  $2R + R_0 + D_0$  de la géodésique  $(w_\infty^-, w_\infty^+)$ . On en déduit que  $g_n.o$  est à distance au moins  $2R$  de cette même géodésique. Pour  $n$  assez grand,  $g_n.o$  est donc à distance au moins  $R$  de la géodésique  $(\gamma_n^{-1}.v^-, \gamma_n^{-1}.v^+)$ .

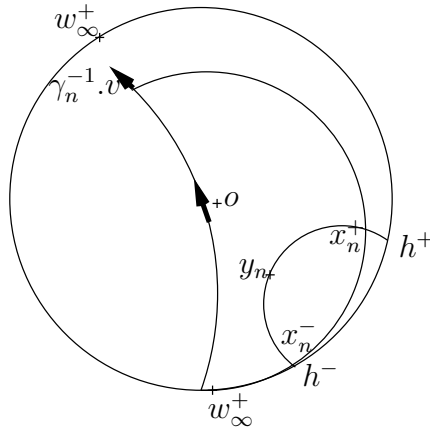


FIG. 3 – Démonstration du théorème 1.1

- Revenons par  $\gamma_n$  : notons  $h_n^\pm = \gamma_n.h^\pm$ , et  $h_n = \gamma_n \circ h \circ \gamma_n^{-1}$  l'isométrie hyperbolique associée. Les points  $\gamma_n.g_n.o$ , pour  $n$  suffisamment grand, sont tous dans l'horoboule  $Hor^+(g^{-D}v)$  sans être dans le cône  $\mathcal{C}(v, R)$ . C'est bien le résultat voulu.

## 4 Et plus généralement

Avant de commencer la preuve du théorème 1.2, rappelons quelques lemmes classiques de géométrie hyperbolique, dont on pourra trouver des énoncés dans [G-Ha] ou [C-D-P] par exemple.

**Lemme 4.1** Soit  $(a, b, c)$  un triangle hyperbolique (éventuellement infini). Si l'angle au sommet  $a$  est minoré par  $\alpha_0 > 0$ , alors il existe une constante  $C(\alpha_0) > 0$ , telle que

1. on a  $d(a, b) + d(b, c) - C(\alpha_0) \leq d(b, c) \leq d(a, b) + d(a, c)$ ,
2. la distance de  $a$  à  $[b, c]$  est majorée par  $C(\alpha_0)$ .

La réciproque à ce lemme est également vraie :

**Lemme 4.2** Soit  $k > 0$ . Il existe des constantes  $\alpha(k) > 0$ ,  $d(k) > 0$  et  $C(k) = C(\alpha(k))$  telles que si  $(a, b, c)$  est un triangle hyperbolique (éventuellement infini) vérifiant  $d(a, [bc]) \leq k$  et  $d(b, c) \geq d(k)$ , alors l'angle au sommet  $a$  du triangle  $(a, b, c)$  est au moins égal à  $\alpha(k)$ , et on a

$$d(a, b) + d(b, c) - C(k) \leq d(b, c) \leq d(a, b) + d(a, c).$$

Énonçons un dernier lemme, également utile, sous la forme dont nous aurons besoin.

**Lemme 4.3** Il existe une constante  $\delta > 0$ , ne dépendant que de la géométrie de  $\mathbb{D}$ , t.q. pour tout  $\xi \in \partial\mathbb{D}$  et  $p, q \in \mathbb{D}$  t.q.  $\beta_\xi(p, q) = 0$ , on peut trouver un « triangle intérieur »  $\alpha, \beta, \gamma$  vérifiant  $\alpha \in (\xi, q]$ ,  $\beta \in (\xi, p]$ ,  $\gamma \in [p, q]$ ,  $d(\alpha, \beta) \leq \delta$ ,  $d(\alpha, \gamma) \leq \delta$ ,  $d(\beta, \gamma) \leq \delta$ , et de plus  $\beta_\xi(\alpha, \beta) = 0$ ,  $d(\alpha, q) = d(\gamma, q)$ ,  $d(\beta, p) = d(\gamma, p)$ .

Dans cette situation, on a également  $d(p, q) = 2d(p, \gamma) = 2d(p, \beta) = 2d(q, \gamma) = 2d(q, \alpha)$ .

Démontrons maintenant le théorème 1.2.

*Démonstration :* L'idée est la suivante. Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique correspondant à l'une des géodésiques périodiques, de longueur au plus  $\Lambda$ , croisées par  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$ . Cette isométrie déplace les points de l'orbite  $\Gamma.o$ . Étant données deux constantes  $D > 0$  et  $R > 0$ , cette isométrie itérée convenablement devrait envoyer un point de  $\Gamma.o \cap \text{Hor}^\pm(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R)$  dans  $\Gamma.o \cap \text{Hor}^\mp(g^{-D+C_{ste}}v) \setminus \mathcal{C}(v, R - C_{ste})$ .

Introduisons quelques notations. On relève  $v$  sur  $T^1\mathbb{D}$ , et on le note encore  $v$ . Soit  $y_0 \in \Gamma.o$  un point de  $\text{Hor}^\pm(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R)$ , et soit  $x_0$  son projeté sur l'axe  $(\gamma^-, \gamma^+)$ . Notons  $x_n = \gamma^n(x_0)$  et  $y_n = \gamma^n(y_0)$ . Supposons que  $\gamma^- \geq v^- \geq \gamma^+$ , sur le cercle orienté dans le sens trigonométrique, de sorte que  $\gamma$  va avoir tendance à envoyer des points de  $\text{Hor}^+$  vers  $\text{Hor}^-$ , et non l'inverse. Supposons par conséquent que  $v^-$  est horosphérique à droite, et montrons qu'il est horosphérique à gauche.

Fixons d'abord  $D, R$ , grands devant toutes les constantes de l'énoncé, et des lemmes de la preuve : la borne  $\Lambda$  sur les longueurs des géodésiques périodiques croisées, l'angle  $\alpha_0$  qui minore l'angle d'intersection entre  $(g^{-t}v)$  et ces géodésiques périodiques, et les constantes  $C(\alpha_0)$  du lemme 4.1 et  $C(k), d(k)$  du lemme 4.2 pour  $k = C(\pi/2)$  ci-dessus et la constante  $C_2(\alpha_0)$  apparaissant ci-dessous.

Fixons ensuite un point  $y_0 \in \Gamma.o$  de  $\text{Hor}^+(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R)$ , et choisissons pour finir une isométrie  $\gamma$  telle que l'axe  $(\gamma^-, \gamma^+)$  de  $\gamma$  se projette en une géodésique fermée intersectant  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$ , telle que l'angle sur  $\mathbb{D}$  entre l'axe de  $\gamma$  et  $(g^{-t}v)$  est au moins  $\alpha_0$ , et telle que  $y_0$  est dans la composante connexe bornée de  $\text{Hor}(v) \setminus (\gamma^-, \gamma^+)$ . Comme il existe une infinité de telles géodésiques  $(\gamma^-, \gamma^+)$  de plus en plus loin de  $y_0$ , nous supposons que la distance de  $y_0$  à  $(\gamma^-, \gamma^+)$  est supérieure à la constante  $d(k)$  du lemme 4.2, pour  $k = C(\pi/2)$ , constante donnée par le lemme 4.1.

Appelons  $w = h^s v$  le vecteur de l'horocycle de  $v$  tel que  $(g^{-t}w)$  intersecte  $(\gamma^-, \gamma^+)$  orthogonalement. Notons respectivement  $I_v$  et  $I_w$  les points d'intersection de  $(g^{-t}v)$  (resp.  $(g^{-t}w)$ ) avec  $(\gamma^-, \gamma^+)$ .



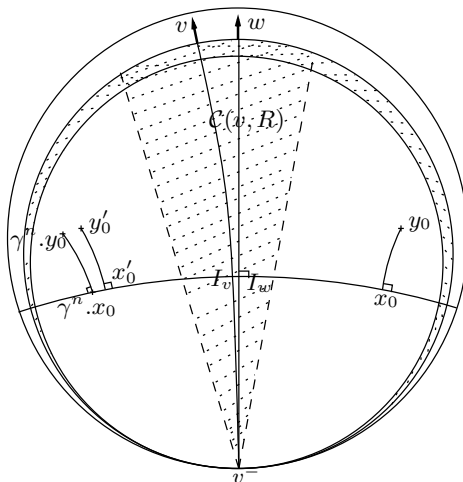


FIG. 4 – Démonstration du théorème 1.2

**Lemme 4.4** *Si l'angle en  $I_v$  entre  $(\gamma^- \gamma^+)$  et  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  est minoré par  $\alpha_0$ , la distance entre  $I_v$  et  $I_w$  est bornée par  $C(\alpha_0)$ .*

*Démonstration :* En considérant le triangle infini  $v^-, I_v, I_w$ , par le lemme 4.1, on obtient  $d(I_v, (v^- I_w)) \leq C(\alpha_0)$ . Comme l'angle en  $I_w$  entre  $(I_v I_w)$  et  $(v^- I_w)$  vaut  $\pi/2$ , cette distance est égale à  $d(I_v, I_w)$ . Le lemme est démontré.  $\square$

**Lemme 4.5** *Soit  $x_0$  le projeté de  $y_0$  sur  $(\gamma^- \gamma^+)$ , et  $x_n = \gamma^n x_0$ ,  $y_n = \gamma^n y_0$ . Il existe des constantes  $C_2(\alpha_0)$  et  $R(\alpha_0)$ , ne dépendant que de  $\alpha_0$ , telle que si  $d(x_n, I_w) \geq R(\alpha_0)$ , et  $d(x_n, I_v) \geq R(\alpha_0/4)$ , alors on a*

$$\begin{aligned} d(y_0, x_0) + d(x_n, I_w) - C_2(\alpha_0) &\leq d(y_n, (g^{-t}w)_{t \geq 0}) \leq d(y_0, x_0) + d(x_n, I_w) \\ d(y_0, x_0) + d(x_n, I_v) - C_2(\alpha_0) &\leq d(y_n, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) \leq d(y_0, x_0) + d(x_n, I_v) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$|d(y_n, (g^{-t}w)_{t \in \mathbb{R}}) - d(y_n, (g^{-t}v)_{t \in \mathbb{R}})| \leq d(I_v, I_w) + C_2(\alpha_0) \leq C_1(\alpha_0) + C_2(\alpha_0).$$

*Démonstration :* Le troisième encadrement découle directement des deux premiers et du lemme 4.4. Il suffit de démontrer les deux premiers encadrements.

Dans les deux cas, les majorations de droite découlent immédiatement de l'inégalité triangulaire standard, et du fait que  $d(x_n, y_n) = d(x_0, y_0)$ .

Le triangle  $y_n, x_n, I_w$  est rectangle en  $x_n$ , de sorte que par le lemme 4.1,  $d(y_n, I_w) \geq d(y_n, x_n) + d(x_n, I_w) - C(\pi/2) = d(y_0, x_0) + d(x_n, I_w) - C(\pi/2)$ . De la même manière,  $d(y_n, I_v) \geq d(y_0, x_0) + d(x_n, I_v) - C(\alpha_0)$ .

Il reste à vérifier que la distance de  $y_n$  à  $(g^{-t}w)_{t \geq 0}$  (resp.  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$ ), est, à des constantes uniformes près, réalisée par  $d(y_n, I_w)$  (resp.  $d(y_n, I_v)$ ).

Soit  $p$  le projeté de  $y_n$  sur  $(g^{-t}w)_{t \in \mathbb{R}}$ . Supposons que  $d(x_n, I_w) \geq C(\alpha_0/4)$ . Le lemme 4.1 dans le triangle  $y_n, I_w, x_n$  implique alors que l'angle en  $I_w$  entre  $[I_w, x_n]$  et  $[I_w, y_n]$  est inférieur à  $\alpha_0/4$ .

Alors, l'angle en  $I_w$  entre  $[I_w p]$  et  $[I_w, y_n]$  est supérieur à  $\pi/2 - \alpha_0/4 > 0$ . Le lemme 4.1 dans le triangle  $(p, I_w, y_n)$  donne alors  $d(y_n, p) \geq d(y_n, I_w) + d(I_w, p) - C(\pi/2 - \alpha_0/4)$ . Par conséquent, on a démontré que  $d(y_n, (g^{-t}w)_{t \geq 0}) = d(y_n, p) \geq d(y_n, I_w) - C(\pi/2 - \alpha_0/4) \geq d(y_0, x_0) + d(x_n, I_w) - C(\pi/2) - C(\pi/2 - \alpha_0)$ .

Le même raisonnement en remplaçant  $I_w$  par  $I_v$  donne  $d(y_n, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) \geq d(x_0, y_0) + d(x_n, I_v) - C(\alpha_0) - C(3\alpha_0/4)$ . Ceci conclut la preuve du lemme.  $\square$

Achevons maintenant la démonstration du théorème. Rappelons que  $y_0 \in \Gamma.o$  est dans  $Hor^+(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R)$ , et que nous souhaitons démontrer que pour  $n$  judicieusement choisi,  $\gamma^n.y_0$  est dans  $Hor^-(g^{-D \pm cste}v) \setminus \mathcal{C}(v, R \pm Cste)$ . Rappelons également que  $w$  est le vecteur de  $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$  tq  $(v^- w^+)$  est orthogonale à  $(\gamma^- \gamma^+)$ .

Soient  $y'_0$  et  $x'_0$  les symétriques respectivement de  $y_0$  et  $x_0$  par rapport à la géodésique  $(v^- w^+)$ . Comme les itérés  $\gamma^n.x_0$  sont ses translatés d'une distance  $l(\gamma) \leq \Lambda$  sur l'axe  $(\gamma^-, \gamma^+)$ , il existe  $n \geq 1$ , tel que  $d(\gamma^n x_0, x'_0) \leq \Lambda$ , et  $d(\gamma^n x_0, x_0) \geq d(x'_0, x_0)$ . Par symétrie, on a  $d(y'_0, \partial Hor(v)) = d(y_0, \partial Hor(v))$  et  $d(y'_0, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) = d(y_0, (g^{-t}v)_{t \in \mathbb{R}})$ .

Notons  $\mathcal{H} = Hor(v)$  et comparons d'abord  $d(y_0, \partial \mathcal{H}) \geq D$  et  $d(y_n, \partial \mathcal{H})$ . Par symétrie, on a bien sûr  $d(y'_0, \partial \mathcal{H}) \geq D$ . Comme  $x_n = \gamma^n.x_0$  et  $x'_0$  sont à distance au plus  $\Lambda$ , on en déduit que  $|d(x_n, \partial \mathcal{H}) - d(x'_0, \partial \mathcal{H})| \leq \Lambda$ . Nous allons chercher à minorer  $d(y_n, \partial \mathcal{H}) - d(y'_0, \partial \mathcal{H})$  par une constante uniforme, ce qui donnera  $d(y_n, \partial \mathcal{H}) \geq D - cste$  pour  $D$  assez grand.

Notons respectivement  $q_n$  et  $q'$  les projetés de  $y_n = \gamma^n.x_0$  et de  $y'_0$  sur  $\partial \mathcal{H}$ . Si  $d(y_n, \partial \mathcal{H}) \geq d(y'_0, \partial \mathcal{H}) \geq D$ , c'est parfait. Supposons donc que  $d(y_n, \partial \mathcal{H}) \leq d(y'_0, \partial \mathcal{H})$ , et montrons que cette distance ne peut pas être trop petite devant  $D$ .

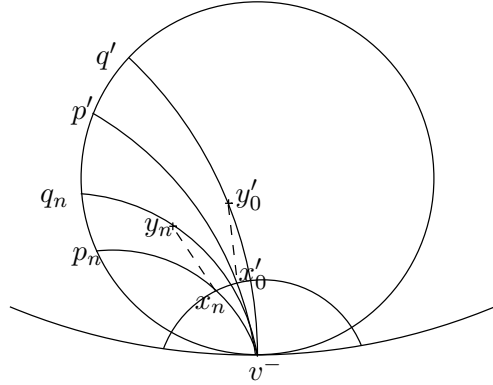


FIG. 5 – Démonstration du théorème 1.2

Le triangle  $(y_n, x_n, v^-)$  a un angle supérieur à  $\pi/2$  en  $x_n$  (car  $x_n$  est le projeté de  $y_n$  sur  $(\gamma^-, \gamma^+)$  qui intersecte  $[y_n, v^-]$ ). D'après le lemme 4.1, on a  $d(x_n, [y_n, v^-]) \leq C(\pi/2)$ . En considérant le triangle  $(q_n, x_n, v^-)$ , on en déduit en particulier que la distance de  $y_n$  au côté  $[q_n, x_n]$  vérifie  $d(y_n, [q_n, x_n]) \leq C(\pi/2)$ . On a supposé  $d(y_n, x_n) = d(y_n, (\gamma^-, \gamma^+))$  grande devant  $k(C(\pi/2))$ . Le lemme 4.2 donne alors  $d(x_n, y_n) + d(y_n, q_n) - C(k(C(\pi/2))) \leq d(x_n, q_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, q_n)$ . Le même raisonnement s'applique bien sûr en remplaçant  $x_n, y_n, q_n$  par  $x'_0, y'_0, q'$ . On en déduit alors (en utilisant le fait que  $d(x_n, y_n) = d(x'_0, y'_0)$ ) que

$$d(y_n, \partial \mathcal{H}) - d(y'_0, \partial \mathcal{H}) = d(y_n, q_n) - d(y'_0, q') \geq d(x_n, q_n) - d(x'_0, q') - C(k(C(\pi/2))).$$

On sait par ailleurs que  $|d(x_n, \partial \mathcal{H}) - d(x'_0, \partial \mathcal{H})| \leq \Lambda$ . Il nous reste donc à comparer  $d(x_n, q_n)$  et  $d(x_n, \partial \mathcal{H})$  d'une part, et  $d(x'_0, q')$  à  $d(x'_0, \partial \mathcal{H})$  d'autre part. On a clairement  $d(x_n, q_n) \geq d(x_n, \partial \mathcal{H})$ . Montrons que  $d(x'_0, q')$  est proche de  $d(x'_0, \partial \mathcal{H})$ .

Considérons le triangle  $(p', q', v^-)$  et appliquons lui le lemme 4.3. Avec les notations de ce lemme, le point  $x'_0$  est sur  $(v^-, p')$ . Si  $x'_0 \in [\beta, v^-)$ , alors il est aisé d'en déduire que  $|d(x'_0, p') - d(x'_0, q')| \leq \delta$ . Si  $x'_0$  était sur  $] \beta, p']$ , alors il existerait

un point de  $(\gamma^- \gamma^+)$  à l'intérieur du triangle  $(\alpha, \beta, \gamma)$  plus proche de  $y'_0$  que  $x'_0$ , ce qui contredirait la définition de  $x'_0$ .

Tout ceci implique que

$$|d(x'_0, \partial\mathcal{H}) - d(x'_0, q')| = |d(x'_0, p') - d(x'_0, q')| \leq \delta.$$

En rassemblant tous ces encadrements, on a démontré que

$$\begin{aligned} d(y_n, \partial\mathcal{H}) - d(y'_0, \partial\mathcal{H}) &\geq d(x_n, \partial\mathcal{H}) - d(x'_0, \partial\mathcal{H}) - \delta - C(k(C(\pi/2))) \\ &\geq -\Lambda - \delta - C(k(C(\pi/2))). \end{aligned}$$

En particulier, on en déduit le résultat voulu, à savoir que pour tout  $D > 0$  assez grand, si  $d(y_0, \partial\mathcal{H}) \geq D$ , alors  $d(y_n, \partial\mathcal{H}) \geq D - \Lambda - \delta - C(k(C(\pi/2)))$ .

Reste à comprendre la distance de  $y_n = \gamma^n \cdot y_0$  à la géodésique  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$ . On a supposé  $d(y_0, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) \geq R$ . Si  $y'_0$  est plus loin que  $y_0$  de cette géodésique, on a  $d(y'_0, (g^{-t}v)_{t \in \mathbb{R}}) \geq R$ . Sinon, cela signifie que  $y'_0$  est plus proche de  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  que de  $(g^{-t}w)_{t \geq 0}$ . Par symétrie, et par le lemme 4.5, on a

$$\begin{aligned} d(y'_0, (g^{-t}w)_{t \geq 0}) &= d(y_0, (g^{-t}w)_{t \geq 0}) \\ &\geq d(y_0, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) - C(\alpha_0) - C_2(\alpha_0) \geq R - C(\alpha_0) - C_2(\alpha_0). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.5,  $d(y_n, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) \geq d(y_n, (g^{-t}w)_{t \geq 0}) - C(\alpha_0) - C_2(\alpha_0)$ .

Par définition de  $y'_0$  et  $y_n$ ,  $y_n$  est plus loin que  $y'_0$  de  $(g^{-t}w)_{t \in \mathbb{R}}$ . On déduit de tout cela que  $d(y_n, (g^{-t}v)_{t \geq 0}) \geq R - 2C(\alpha_0) - 2C_2(\alpha_0)$ .

Autrement dit, si  $y_0$  est dans  $Hor^+(g^{-D}v) \setminus \mathcal{C}(v, R)$ , alors le point  $\gamma^n y_0$  est dans  $Hor^-(g^{-D+\Lambda+\delta+C(k(C(\pi/2)))}v) \setminus \mathcal{C}(v, R - 2C(\alpha_0) - 2C_2(\alpha_0))$ . En particulier, si  $v$  est horosphérique à gauche, alors il est aussi horosphérique à droite. Compte tenu de la proposition 3.3, ceci démontre que sous les hypothèses du théorème 1.2,  $(h^s v)_{s \geq 0}$  et  $(h^s v)_{s \leq 0}$  sont simultanément denses (ou non) dans  $\mathcal{E}$ .

Ceci démontre le théorème.  $\square$

## 5 Un contre-exemple pour finir

On démontre le résultat suivant :

**Théorème 1.3** *Il existe des surfaces hyperboliques contenant des vecteurs  $v$  tels que  $(h^s v)_{s \geq 0}$  est dense dans  $\mathcal{E}$ ,  $(h^s v)_{s \leq 0}$  ne l'est pas,  $v^-$  n'est pas une extrémité d'un intervalle de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ , et  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur tendant vers l'infini, suivant un angle qui peut suivant les constructions tendre vers 0, ou être uniformément minoré.*

L'idée de la construction est la suivante. On prend  $v^- = \infty$ ,  $v^+ = 0$ . Et on étudie l'orbite de  $o = i$ .

On choisit sur  $\mathbb{R}_+$  des demi-cercles  $C_n^+$  tous tangents, de rayon euclidien borné, disons 1, centrés en  $2n + 1$ ,  $n \geq 0$ , allant jusqu'à l'infini. On choisit sur  $\mathbb{R}_-$  des demi-cercles  $C_n^-$  tangents deux à deux, centrés en  $-x_n$  de rayon  $R_n \rightarrow +\infty$ . Par une récurrence immédiate, on a  $x_1 = R_1$ , et  $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2R_k + R_n$ . On choisit des isométries hyperboliques  $\gamma_n$  de longueurs de plus en plus grandes, de points fixes  $\gamma_n^- = 2n + 1$  et  $\gamma_n^+ = x_n$ , et envoyant  $C_n^+$  sur  $C_n^-$ .

Un argument de ping pong classique donne le lemme suivant.

**Lemme 5.1** *Le groupe engendré par les  $\gamma_n$  est un groupe discret, groupe libre (de Schottky) à une infinité de générateurs.*

**Remarque 5.2** Il n'est pas clair si le groupe ainsi construit vérifie  $\Lambda_\Gamma = S^1$ . Si ce n'est pas le cas, il serait intéressant de construire un contre-exemple vérifiant  $\Lambda_\Gamma = S^1$ .

Maintenant, il est assez clair que le vecteur  $v$  basé en  $o = i$  avec  $v^- = \infty$ ,  $v^+ = 0$ , ne peut pas être horosphérique à gauche <sup>(3)</sup>, car l'orbite de  $o = i$  ne rencontre pas du tout  $Hor^-(v)$ .

Il est également clair que si  $\xi \in \Lambda_\Gamma$ ,  $\xi \neq v^\pm$ ,  $\gamma_n \xi$  tend vers  $v^-$  par la droite si  $n \rightarrow +\infty$ , et  $\gamma_n^{-1} \xi$  tend vers  $v^-$  par la gauche. Autrement dit,  $v^-$  n'est pas dans le bord de  $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ .

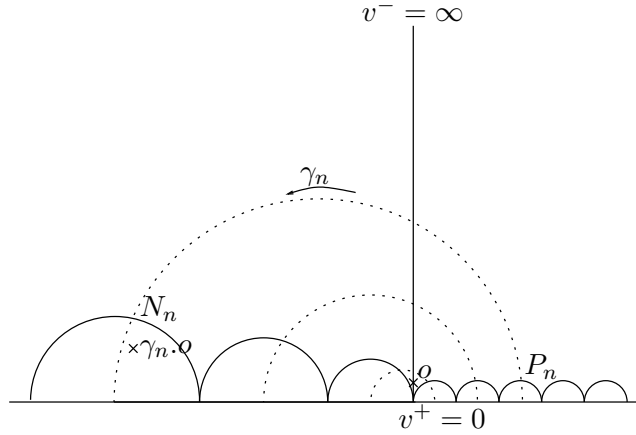


FIG. 6 – Démonstration du théorème 1.3

Il nous reste à vérifier que pour un choix convenable de  $x_n$  et de  $r_n$ ,  $v^-$  est horosphérique à droite. Pour cela, montrons que l'ordonnée de  $\gamma_n \cdot o$  tend vers  $+\infty$  (l'abscisse tend vers  $-\infty$  par construction.)

Notons  $z_n$  le point de coordonnées  $(2n + 1, 1)$ , et  $P_n$  le point d'intersection de l'axe de  $\gamma_n$  et du cercle  $C_n^+$ , soit encore l'intersection des deux demi-cercles d'équations  $(x - (2n + 1))^2 + y^2 = 1$  et  $(x - \frac{2n+1-x_n}{2})^2 + y^2 = (\frac{2n+1+x_n}{2})^2$ . Il a pour coordonnées  $(2n + 1 - \frac{1}{x_n+2n+1}, \sqrt{1 - \frac{1}{(x_n+2n+1)^2}})$ , de sorte que la distance hyperbolique de  $P_n$  à  $z_n$  vérifie  $d(P_n, z_n) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et que pour  $n$  assez grand (indépendamment même du choix de  $x_n$ ),  $d(P_n, z_n) \leq 1$ . Par ailleurs, un calcul classique donne  $d(o, z_n) \sim 2 \ln n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Par conséquent,  $d(o, P_n) \leq 3 \ln n$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

L'image de  $P_n$  par  $\gamma_n$  est le point d'intersection  $N_n = \gamma_n \cdot P_n$  du demi-cercle  $C_n^-$  et de l'axe de  $\gamma_n$ , d'équations respectives  $(x+x_n)^2 + y^2 = r_n^2$  et  $(x - \frac{2n+1-x_n}{2})^2 + y^2 = (\frac{2n+1+x_n}{2})^2$ . Le point  $N_n$  a donc pour coordonnées

$$\left( -x_n + \frac{r_n^2}{2n + 1 + x_n}, r_n \sqrt{1 - \frac{r_n^2}{(2n + 1 + x_n)^2}} \right).$$

Maintenant, on sait que la distance de  $\gamma_n \cdot o$  à  $N_n$  est au plus  $3 \ln n$  pour  $n$  grand. On souhaite avoir des  $\gamma_n \cdot o$  de partie imaginaire aussi grande que possible. Or  $\text{Im}(\gamma_n \cdot o) \geq r_n \sqrt{1 - \frac{r_n^2}{(2n+1+x_n)^2}} - 3 \ln n$ .

<sup>3</sup>la terminologie *horosphérique à droite ou à gauche* peut sembler absurde sur cet exemple, mais ... elle est adaptée pour tous les points de l'axe réel dans le bord à l'infini.

Observons que  $x_n + r_n = 2 \sum_{k=1}^n r_k$ . Si nous choisissons pour tout  $k \geq 1$ ,  $r_k = k$ , nous obtenons  $x_n + n = n(n+1)$ , soit  $x_n = n^2$ , et  $r_n \sqrt{1 - \frac{r_n^2}{(2n+1+x_n)^2}} = n \sqrt{1 - \frac{n^2}{(n+1)^4}} \sim n$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Autrement dit, ce choix de  $(r_n)_{n \geq 1}$  convient.

Si nous choisissons pour tout  $k \geq 1$ ,  $r_k = \alpha^k$ ,  $\alpha > 1$ , nous obtenons  $x_n + \alpha^n = 2\alpha(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1)$ , puis  $x_n = \alpha^n \frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \frac{2\alpha^{1-n}}{\alpha-1}$ . Notons  $y_n$  l'ordonnée de  $N_n$ . Une vérification immédiate donne  $y_n^2 \sim \alpha^{2n} \frac{4\alpha}{(\alpha+1)^2} \gg (3 \ln n)^2$ . Donc  $\text{Im}(\gamma_n.o) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , et ce choix de  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convient aussi.

**Remarque 5.3** Il est clair par construction qu'au quotient, la géodésique  $(g^{-t}v)_{t \geq 0}$  croise une infinité de géodésiques fermées, de longueur tendant vers  $+\infty$ , à savoir les projections sur la surface quotient des axes des  $\gamma_n$ .

Un calcul montre que l'angle  $\theta_n$  entre la géodésique  $(v^-v^+) = i\mathbb{R}$ , et l'axe de  $\gamma_n$  vérifie  $\cos \theta_n = \frac{x_n - (2n+1)}{x_n + 2n+1}$ . Dans les deux exemples ci-dessus, on a  $2n+1 = o(x_n)$ , d'où  $\cos \theta_n \rightarrow 1$  et  $\theta_n \rightarrow 0$ .

Autrement dit, l'exemple ci-dessus ne vérifie aucune des deux hypothèses du théorème 1.2.

On peut le modifier pour qu'il vérifie l'une des deux. Par exemple, la lectrice vérifiera aisément que si les cercles  $C_n^-$  sont inchangés, centrés en  $-x_n$ , et de rayon  $R_n \rightarrow +\infty$ , mais les cercles  $C_n^+$  sont maintenant centrés en  $+x_n$ , et toujours de rayon 1 (ils ne sont plus tangents deux à deux), alors la géodésique  $(v^-v^+) = i\mathbb{R}$  intersecte l'axe  $(-x_n, x_n)$  de  $\gamma_n$  orthogonalement. La distance de  $o$  à  $P_n$  est équivalente à  $2 \ln x_n$ , donc  $d(\gamma_n.o, N_n) \sim 2 \ln x_n$ , alors que l'ordonnée du point  $N_n$  vaut  $y_n = r_n \sqrt{1 - \frac{r_n^2}{4x_n^2}}$ . Si  $R_n = n$  et  $x_n = n^2$ , la partie imaginaire de  $\gamma_n.o$  tend vers  $+\infty$ , de sorte que le point  $+\infty$  est encore horosphérique à droite mais pas à gauche.

Par ailleurs, on peut si on le souhaite rajouter des isométries envoyant des cercles de hauteur bornée les uns sur les autres, pour « boucher les trous » entre les demi-cercles  $C_n^+$ . Il n'est pas sûr que cela donne un ensemble limite  $\Lambda_\Gamma = S^1$ , du fait du diamètre non borné des cercles  $C_n^-$ .

## Références

- [C-D-P] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*, in 'Les groupes hyperboliques de Gromov', Lecture Notes in Math. 1441, Springer Verlag, Berlin 1990.
- [Da] F. Dal'bo *Topologie du feuilletage fortement stable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (3) (2000), 981–993.
- [E1] P. Eberlein *Geodesic flows on negatively curved manifolds I*, Ann. of Maths (2) **95** (1972), 492–510.
- [E2] P. Eberlein *Geodesic flows on negatively curved manifolds II*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 57–82.
- [G-Ha] É. Ghys, P. de la Harpe, *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* (Berne 1988), Progr. Math. vol. 83, 1–25, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [H] G.A. Hedlund *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. **2** (1936), 530–542.
- [Sa] O. Sarig *The horocycle flow and the Laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus*. Geom. Funct. Anal. **19** (2010), no. 6, 1757–1812.

- [**Sa-Scha**] O. Sarig, B. Schapira *The generic points for the horocycle flow on a class of hyperbolic surfaces with infinite genus*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2008), Art. ID rnn 086, 37 pp.
- [**Scha**] B. Schapira, *Density and equidistribution of half-horocycles on a geometrically finite hyperbolic surface*, (2010) To appear in Journal of the LMS .