

Mémoire

présenté à l'Université Picardie Jules Verne
UFR Sciences
Ecole Doctorale Sciences et Santé
pour obtenir l'

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Discipline : MATHÉMATIQUES

par

Barbara SCHAPIRA

Géodésiques, horocycles, et leurs mesures invariantes

Soutenue le 24 novembre 2011

Après avis des RAPPORTEURS :

Françoise DAL'BO, Professeure des Universités, Université Rennes I,
François LEDRAPPIER, Professor, Notre Dame University,
Nimish SHAH, Professor, Ohio State University.

Devant le JURY présidé par **Marie-Claude ARNAUD**, et composé de :

Marie-Claude ARNAUD, Professeure des Universités, Université d'Avignon,
Gilles COURTOIS, Directeur de Recherches, Université Pierre et Marie Curie
Françoise DAL'BO, Professeure des Universités, Université Rennes I,
Fabien DURAND, Professeur des Universités, Université Picardie Jules Verne,
Livio FLAMINIO, Professeur des Universités, Université Lille I,
François LEDRAPPIER, Professor, Notre Dame University.

Remerciements

Je remercie vivement Françoise Dal'bo, François Ledrappier, et Nimish Shah pour l'intérêt porté à mon travail, et le temps consacré à la lecture de ce mémoire. Je remercie aussi très chaleureusement Marie-Claude Arnaud, Gilles Courtois, Françoise Dal'bo, Fabien Durand, Livio Flaminio, François Ledrappier pour m'avoir fait l'honneur et l'amitié d'être venus m'écouter aujourd'hui. Je remercie également Marc Peigné pour son soutien, même s'il n'est pas là aujourd'hui. Au fil des années, les lectures des travaux de ces mathématicien-ne-s, ainsi que les rencontres et discussions avec eux, ont été cruciales dans mon cheminement mathématique.

La recherche est une activité d'autant plus passionnante que ses émotions, déceptions, inquiétudes ou grands plaisirs, en sont partagées. C'est donc un plaisir de remercier d'abord tous les membres du projet ANR Temi, grâce auxquels j'ai surmonté les difficultés du début de carrière, puis bien sûr mes collaborateurs, avec lesquels j'ai découvert qu'il est bien plus amusant de travailler à plusieurs que toute seule, ainsi que les collègues de l'ANR Geode, et bien entendu les membres du GDR CNRS Platon, dont les rencontres rythment mes années mathématiques.

L'ambiance chaleureuse du LAMFA, et toutes les discussions sur la recherche, l'enseignement, et toutes les autres facettes de notre métier, ont été très précieux. Merci donc à Fabien, Frédéric, Véronique pour toutes nos discussions, en particulier au début de carrière, à Ai Hua pour le plaisir d'enseigner avec lui, à Karine, Marion, Gabriel pour les discussions sur la conciliation entre vie de famille, enseignement, recherche, loisirs, trajets en train, ... , à Olivier pour les coups de gueule, au « staff » pour son efficacité et sa bonne humeur, et à tout le labo pour l'ambiance.

Les militants rencontrés pendant l'année 2009, de toutes disciplines, m'ont appris à m'interroger sur le sens de notre métier, sur ses valeurs. Cette année moins studieuse, mais immensément riche en rencontres et en questionnements scientifiques et syndicaux, m'a permis de renouveler mon appétit pour la recherche et pour ce métier.

Ma famille a su me donner le goût des sciences, la curiosité, mais aussi la volonté, la combativité nécessaires quand certains résultats résistent à être démontrés, ou pour écrire ce mémoire en fin de grossesse. J'ai une pensée toute particulière pour mon grand-père, ses explications sur tous les sujets, et ses travaux pratiques sur la condensation à l'aide du four et du congélateur...

Grâce à Matthieu, Juliette, Fanny, et maintenant Chloé, mes journées sont très remplies, mes nuits sont plutôt courtes, mais je reçois l'énergie et la joie de vivre nécessaires (et suffisantes) pour tout le reste.

Martine Babillot est la première personne que j'aurais aimé remercier aujourd'hui. Les années qui passent n'effacent pas son souvenir, et la découverte des joies de la recherche mathématique à ses côtés. Je lui dédie ce texte.

Table des matières

1	Introduction	6
2	Densité et équidistribution des demi-horocycles	9
2.1	Densité de demi-horocycles	11
2.1.1	Notations	11
2.1.2	Vecteurs dont la géodésique est périodique	13
2.1.3	Vecteurs horosphériques à droite	15
2.1.4	Densité des demi-horocycles	15
2.1.5	Un exemple	17
2.2	Equidistribution des demi-horocycles d'une surface géométriquement finie	18
2.2.1	Quelques mesures importantes sur Ω et \mathcal{E}	19
2.2.2	Les étapes clé de la démonstration	20
2.2.3	Retour sur l'équidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie	20
3	Equidistribution des horocycles sur des revêtements abéliens de surfaces compactes	22
3.1	Introduction	22
3.2	Cadre et résultat	23
3.3	Formalisme thermodynamique, propriétés des mesures invariantes	25
3.4	Cycle asymptotique d'un vecteur générique	26
3.4.1	Une preuve fausse	27
3.4.2	Une idée de la démonstration	27
3.5	Généricité d'un vecteur de cycle asymptotique donné	29
3.5.1	Proposition Clé	29
3.5.2	Codage	29
3.5.3	Démonstration de la proposition clé	30
4	Action linéaire de sous-groupes de type fini de $SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2	31
4.1	Dualité entre l'action linéaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 et l'action par isométries de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H}	32
4.1.1	Généralités	32
4.1.2	Groupes géométriquement finis, mesures invariantes et dualité	33
4.2	Distribution des orbites d'un groupe de type fini sur \mathbb{R}^2	34
4.2.1	Résultats	35
4.3	Heuristique de la preuve	37

5	Mesures génériques pour le flot géodésique	39
5.1	Spécification, produit local, lemme de fermeture, transitivité	40
5.2	Propriétés génériques des mesures invariantes en courbure strictement négative	42
5.3	Entropie, mélange	43
5.4	Extension des résultats précédents aux variétés de courbure négative ou nulle	46
5.4.1	Quelques sous-ensembles sur lesquels étudier la dynamique	47
5.4.2	Mesures génériques sur Ω_1 et Ω_{NF}	48
5.4.3	Propriétés de produit local, fermeture et transitivité sur Ω_1 et Ω_{NF}	49
5.4.4	Quelques exemples	50
6	Mesures de Gibbs, mesures d'équilibre	53
6.1	Définitions, construction, premières propriétés	54
6.1.1	Pression, mesures d'équilibre, mesures de Gibbs	54
6.1.2	Construction géométrique des mesures de Gibbs	56
6.1.3	Propriétés élémentaires de la pression	58
6.2	Principe variationnel	60
6.2.1	Énoncé	60
6.2.2	Cas des variétés compactes ou convexe-cocompactes	61
6.2.3	Démonstration de l'inégalité $P_{\mathcal{M}}(f) \leq \delta_{\Gamma, f}$	61
6.2.4	Démonstration de l'inégalité $\delta_{\Gamma, f} \leq P_{\mathcal{M}}(f)$	65
7	Perspectives	68
7.1	Horocycles	68
7.2	Variétés à courbure négative ou nulle et mesures invariantes	69
7.3	Mesures de Gibbs, formalisme thermodynamique	70
7.4	Autres projets	71
8	Liste des travaux	72
	Bibliographie	74

Chapitre 1

Introduction

La théorie ergodique est une branche des systèmes dynamiques dans laquelle on essaie de comprendre un système à l'aide de ses mesures invariantes. Naturellement, les propriétés espérées seront différentes suivant que le système aura peu ou beaucoup de mesures invariantes. Donnons un exemple.

L'un des premiers théorèmes est le théorème ergodique de Birkhoff. Soit (X, \mathcal{B}) un espace mesurable, $T : X \rightarrow X$ un système dynamique, et μ une mesure de probabilité *ergodique* (i.e. qui donne mesure 0 ou 1 aux ensembles invariants par T). Le théorème de Birkhoff assure alors que pour μ -presque tout $x \in X$, l'orbite $(T^k x)_{k \geq 0}$ s'équidistribue vers μ , i.e. pour toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Observons tout de suite que ce théorème n'a pas la même signification suivant le nombre de mesures invariantes de (X, T) . Si μ est l'unique mesure invariante (ergodique) du système dynamique $T : X \rightarrow X$, en règle générale, on peut espérer obtenir facilement que pour *tout* $x \in X$, l'orbite de x s'équidistribue vers μ . En revanche, s'il y a beaucoup de mesures invariantes ergodiques, le « μ -p.s. » du théorème ci-dessus est un peu frustrant : il va être difficile, pour un $x \in X$ fixé, de déterminer si son orbite est équidistribuée vers une mesure invariante, et si oui, vers laquelle.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à ce type de questions, pour deux systèmes dynamiques très liés, le flot géodésique et le flot horocyclique agissant sur le fibré unitaire tangent de surfaces hyperboliques. ⁽¹⁾

Considérons une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, où Γ est un groupe discret d'isométries, non élémentaire (i.e. non virtuellement abélien), du demi plan hyperbolique \mathbb{H} . Le flot géodésique $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ et le flot horocyclique $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$ sont deux systèmes dynamiques d'origine géométrique qui agissent sur le fibré unitaire tangent $T^1 S = \Gamma \backslash T^1 \mathbb{H}$ de la surface.

Historiquement, le flot géodésique a été étudié déjà par Hadamard, [H98], comme un premier exemple géométrique intéressant de système dynamique présentant les propriétés chaotiques introduites peu de temps auparavant par Poincaré. Le flot

1. Nous nous intéressons également à des variétés de courbure variable et de dimension quelconque, mais pas dans cette introduction.

horocyclique apparait dans les travaux de Hopf et Hedlund [Ho36], [H36], dans les années 1930, au moment donc de l'essor de la toute jeune théorie ergodique. Ces deux systèmes dynamiques sont étudiés comme exemples naturels et intéressants illustrant les propriétés dynamiques et ergodiques intéressantes depuis plus d'un siècle. Mentionnons encore, dans ce cadre, les noms d'Anosov, Margulis, Furstenberg, Dani, ... Etonnamment, les dynamiciens n'ont pas épuisé cette étude, et ces deux systèmes dynamiques sont maintenant étudiés pour comprendre ce qui se passe sur des espaces non compacts, ou en courbure variable comme exemples de dynamique non uniformément hyperbolique, ou comme exemples intéressants en théorie ergodique en mesure infinie.

Mes travaux s'insèrent dans ce cadre, puisqu'un de leurs fils directeurs est de comprendre, parmi les propriétés ergodiques classiques de ces flots dans les situations bien connues (surfaces hyperboliques compactes), quelles sont les propriétés qui sont conservées, ou pas, lorsqu'on augmente la dimension, qu'on ôte l'hypothèse de compacité ou même de volume fini, ou lorsqu'on fait varier la courbure, voire qu'on lui permet de s'annuler.

Bien qu'intimement liés par la relation de commutation

$$g^t \circ h^s = h^{se^{-t}} \circ g^t, \quad \text{pour tous } (s, t) \in \mathbb{R}^2,$$

ces deux flots possèdent des propriétés dynamiques radicalement différentes.

Le flot géodésique est un flot hyperbolique, avec de fortes propriétés stochastiques : il possède une infinité d'orbites périodiques, des orbites denses, d'autres plus compliquées encore, et une infinité non dénombrable de mesures invariantes. Il est d'entropie positive, exponentiellement mélangeant, ... Comprendre l'ensemble de ses mesures invariantes est une tâche bien trop ambitieuse. Néanmoins, je me suis intéressée à deux types de propriétés, d'une part des propriétés génériques (au sens de Baire) de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes, dans les travaux [7,11,15], mais aussi les propriétés d'une famille de mesures bien spécifiques, aux propriétés dynamiques particulièrement intéressantes, les mesures de Gibbs, dans [2,14].

Le flot horocyclique au contraire, sur une surface hyperbolique compacte, est uniquement ergodique (Furstenberg [F73]). Cela implique des propriétés d'équidistribution de toutes ses orbites vers l'unique mesure invariante. Sur des surfaces non compactes, d'autres mesures invariantes apparaissent, mais plutôt peu (cf travaux de Dani [Da78], Dani Smillie [Da-S84] en volume fini, de Roblin [Ro03] pour le cas géométriquement fini, et Babillot-Ledrappier [Ba-L98bis], Sarig [S04] pour des revêtements de surfaces compactes). Heuristiquement, une mesure ergodique pour le flot horocyclique représente une façon pour le flot géodésique de partir à l'infini. Et sous de bonnes hypothèses géométriques, il y a « peu » de façons de partir à l'infini. Ainsi, dans le cadre des travaux cités ci-dessus, on parvient tout de même à établir certaines propriétés d'équidistribution d'orbites. C'est l'esprit de mes travaux [4,5,9,10]. L'article [13] utilise l'équidistribution des horocycles, suivant une méthode développée par Ledrappier, [L94], pour étudier la distribution d'orbites de groupes discrets agissant linéairement sur le plan. Les articles [10] et [12] étudient principalement des propriétés topologiques de densité des orbites du flot horocy-

clique, généralisant d'anciens résultats d'Hedlund.

La liste de mes travaux, publiés ou prépubliés, est présentée au chapitre 8. Dans ce mémoire, ne sont détaillés que ceux qui sont postérieurs à ma thèse et sur les sujets évoqués ci-dessus, à savoir [7] et [9] à [13].

Le mémoire est organisé en deux grandes parties.

Dans la première partie (chapitres 2, 3 et 4), je décris mes travaux sur le flot horocyclique. Le chapitre 2 traite de questions de densité et d'équidistribution de demi-horocycles, en suivant [10,12]. Au chapitre 3, je présente les résultats obtenus dans [9], et au chapitre 4, ceux de [13].

Dans une seconde partie (chapitres 5 et 6), je décris les travaux sur les mesures invariantes par le flot géodésique. Le chapitre 5 décrit les résultats obtenus dans [7] et [11], avec certaines améliorations issues d'un travail en cours, numéroté [15]. Le chapitre 6 a un statut un peu particulier. Il traite de résultats obtenus dans [14]. La rédaction de cet article n'est pas terminée du fait de sa longueur. Mais les résultats présentés au chapitre 6 sont pour l'essentiel achevés depuis longtemps, c'est pourquoi nous avons souhaité les présenter. Les preuves sont incluses, étant donné qu'elles ne sont pas accessibles par ailleurs.

Pour finir, le chapitre 7 donne quelques perspectives pour mes travaux futurs.

Les notations et définitions sont introduites au fur et à mesure des besoins, avec peu de redondances pour ne pas alourdir le texte.

Chapitre 2

Densité et équidistribution des demi-horocycles

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats de [10,12], ainsi qu'une amélioration dont nous avons eu besoin dans [13]. Notons que [12] est disponible en ligne en version française ou anglaise (identiques, à traduction près).

Soit $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ une surface hyperbolique. Lorsque S est compacte, il est bien connu que le flot horocyclique est uniquement ergodique [F73]. En particulier, tous les horocycles s'équidistribuent vers la mesure de Liouville, qui est l'unique mesure invariante par le flot horocyclique.

Lorsque S est de volume fini, le flot horocyclique admet des orbites périodiques, et donc des mesures périodiques ergodiques associées, mais le résultat reste essentiellement vrai : la mesure de Liouville est la seule mesure invariante finie en dehors des mesures associées aux orbites périodiques [Da78], et toutes les orbites non périodiques s'équidistribuent vers la mesure de Liouville [Da-S84].

Dans [1,4,5], je me suis intéressée aux résultats analogues dans le cas des surfaces dites *géométriquement finies*, i.e. les surfaces S telles que Γ est de type fini. Considérons donc une telle surface S , géométriquement finie et de volume infini. Dans ce cas, la classification des orbites (voir [H36] [D00]) et des mesures invariantes est connue : le flot horocyclique admet des orbites fermées non compactes errantes, et donc des mesures invariantes infinies ergodiques totalement dissipatives associées, des orbites périodiques et leurs mesures finies ergodiques associées si la surface admet des cusps, et une unique autre mesure invariante ergodique de support tout l'ensemble non errant \mathcal{E} du flot horocyclique [Bu90] [Ro03]. Cette mesure a été baptisée récemment mesure de Burger-Roblin, et nous suivrons donc cette terminologie, en la notant m^{BR} . Dans [1,4,5], nous avons utilisé ce résultat pour démontrer que toutes les orbites non-errantes et non périodiques s'équidistribuent vers cette mesure m^{BR} .

Sans rentrer dans tous les détails de ces résultats, notons qu'ils ont été démontrés en courbure variable (négative pincée), et que le résultat crucial pour obtenir cette équidistribution est une propriété de non-divergence des horocycles, obtenue dans [4] en courbure variable et dimension quelconque. Le résultat principal de [5] est le suivant.

Théorème 2.1 ([5]) *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie non*

élémentaire. Soit $v \in \mathcal{E}$ un vecteur non-errant et non périodique pour le flot horocyclique. Soient f et g deux fonctions continues à support compact, avec $\int_{T^1S} g dm^{BR} > 0$. Alors

$$\frac{\int_{-t}^t f \circ h^s v ds}{\int_{-t}^t g \circ h^s v ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1S} f dm^{BR}}{\int_{T^1S} g dm^{BR}} \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Faisons tout de suite quelques remarques au sujet de ce résultat.

1. D'abord, il s'agit d'un théorème d'équidistribution quotient, analogue au théorème ergodique de Hopf. Ceci est dû au fait que la mesure m^{BR} est infinie.
2. Ensuite, nous considérons l'équidistribution de moyennes sur l'orbite $(h^s v)_{|s| \leq t}$ et non pas $(h^s v)_{0 \leq s \leq t}$. Un regard géométrique ne s'en formalise pas, mais du point de vue ergodique c'est a priori étonnant. Un retour en arrière nous montre que les résultats de [F73] et [Da-S84] sont obtenus pour des orbites positives $(h^s v)_{0 \leq s \leq t}$, tandis que les résultats (partiels) de [Bu90], [Ro03] et le nôtre dans [5] sont obtenus pour des orbites symétriques $(h^s v)_{|s| \leq t}$. Sur une suggestion d'Omri Sarig, nous avons essayé d'éclaircir ce point.
3. Dans [10,12] nous avons utilisé le flot horocyclique instable. Ici, pour présenter les résultats du mémoire de manière unifiée, nous traduisons les énoncés pour le flot horocyclique stable.
4. Dans [13], nous avons eu besoin non pas d'un théorème quotient comme celui-ci, mais d'un équivalent d'intégrales du type $\int_{-t}^t f \circ h^s u ds$. Ce résultat est présenté au paragraphe 2.2.3.

Un premier regard sur la question nous fournit une obstruction triviale à l'équidistribution de demi-horocycles $(h^s v)_{s \geq 0}$. Sur une surface S géométriquement finie de volume infini, il y a des *trompettes*, i.e. des bouts de volume infini, isométriques au quotient de \mathbb{H} par $z \mapsto \lambda z$, avec $\lambda > 1$. Si v est un vecteur tangent à la géodésique périodique fermant une trompette, il est immédiat de vérifier que son horocycle $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense dans l'ensemble non errant \mathcal{E} , mais que l'un des deux côtés entre dans la trompette sans jamais en ressortir, et ne peut donc pas être dense dans \mathcal{E} , et encore moins équidistribué. Plus généralement, c'est encore vrai si v est un vecteur tel que pour un certain $s_0 \in \mathbb{R}$, $h^{s_0} v$ est tangent à la géodésique périodique en question, puisqu'alors il a le même horocycle que $h^{s_0} v$. C'est le cas pour le vecteur représenté à la figure ci-dessous.



FIGURE 2.1 – Vecteur dont l'horocycle stable n'est pas dense

Dans [10], nous avons montré que lorsque S est géométriquement finie, l'obstruction présentée ci-dessus est la seule possible. En particulier, si $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense dans \mathcal{E} et si $(h^s v)_{s \geq 0}$ n'entre pas définitivement dans une trompette, alors $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} .

De plus, nous avons vérifié que la non-densité éventuelle de $(h^s v)_{s \geq 0}$ dans \mathcal{E} était le seul obstacle à l'équidistribution. Autrement dit, nous avons démontré que si $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} , il est équidistribué.

Les résultats les plus récents de classification des horocycles denses ou non, comme [D00], sont valides en dimension quelconque et courbure variable. En particulier, Dal'bo [D00] donne des résultats sur la densité des horosphères en dimension quelconque. Or, lorsque la dimension de la variété est $n \geq 3$, les horosphères sont de dimension $n - 1 \geq 2$, de sorte qu'on ne peut pas parler de demi-horosphères, et que la densité des horosphères n'a de sens que globalement. D'ailleurs, dans [D00], la densité est obtenue en étudiant l'action du groupe Γ sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}$, méthode qui ne permet pas simplement de garder trace de la droite et la gauche. Nous avons donc suivi une autre stratégie, et adapté des arguments inspirés de [Cou05].

Dans [H36], Hedlund s'intéressait déjà aux demi-horocycles positifs $(h^s v)_{s \geq 0}$. Il a obtenu des résultats partiels sur leur densité, pour des surfaces géométriquement infinies de première espèce, i.e. dont l'ensemble limite est égal à tout le bord à l'infini, et dans le cas de vecteurs v dont la géodésique revient infiniment souvent dans un compact. Ceci nous a motivée pour obtenir une réponse complète à la question de la densité. Nous obtenons une réponse presque complète dans [12]. Si v est un vecteur dont l'horocycle complet $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense, et si la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ définie par v croise une infinité de géodésiques périodiques de longueur bornée, avec un angle d'intersection minoré, alors ses deux demi-horocycles $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont simultanément denses dans l'ensemble non-errant \mathcal{E} du flot horocyclique (voir théorème 2.7). Cette hypothèse est quasiment optimale, car nous obtenons des contre-exemples au résultat dès que la géodésique définie par v ne croise pas une infinité de géodésiques périodiques de longueur bornée. D'ailleurs, une hypothèse similaire intervient dans [S10] pour des résultats différents sur le flot horocyclique, ce qui tend à la justifier. En revanche, la condition d'angle minoré n'est sans doute pas nécessaire, mais nous n'avons pas encore réussi à l'enlever.

Dans le premier paragraphe, nous présentons nos résultats sur la densité des demi-horocycles, et dans le second nous rappelons les idées principales de notre résultat d'équidistribution, dans le cas des demi-horocycles.

2.1 Densité de demi-horocycles

2.1.1 Notations

Géométrie hyperbolique

On note $\mathbb{D} = D(0, 1)$ le disque hyperbolique, muni de la métrique hyperbolique $\frac{4dx^2}{(1-|x|^2)^2}$, o l'origine du disque, $\pi : T^1\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ la projection canonique, $S^1 = \partial\mathbb{D}$ le bord à l'infini de \mathbb{D} , et d la distance riemannienne sur \mathbb{D} et $T^1\mathbb{D}$.

L'identification classique de \mathbb{D} avec $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ via l'homographie $z \mapsto i \frac{1+z}{1-z}$ permet d'identifier le groupe des isométries préservant l'orientation de \mathbb{D} avec $PSL(2, \mathbb{R})$

agissant par homographies sur \mathbb{H} . Cette action s'étend à $T^1\mathbb{D}$ (ou $T^1\mathbb{H}$), et devient simplement transitive; on identifie donc $T^1\mathbb{D}$ avec $PSL(2, \mathbb{R})$.

Si $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ est un groupe discret, son *ensemble limite* $\Lambda_\Gamma = \overline{\Gamma.o} \setminus \Gamma.o \subset S^1$ est également le plus petit fermé Γ -invariant non vide de S^1 . L'action de Γ sur Λ_Γ est minimale : pour tout $\xi \in \Lambda_\Gamma$, $\Gamma.\xi$ est dense dans Λ_Γ .

Un point $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est dit *radial* s'il est limite d'une suite $(\gamma_n.o)$ de points de $\Gamma.o$ qui restent à distance hyperbolique bornée du rayon géodésique $[o\xi]$ reliant o à ξ . Nous noterons Λ_{rad} l'*ensemble limite radial*.

Un *horocycle* de \mathbb{D} est un cercle euclidien tangent à S^1 ; c'est également une ligne de niveau d'une fonction de Busemann. Une *horoboule* est un disque (euclidien) bordé par un horocycle. Un point $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est *horosphérique* si toute horoboule centrée en ξ contient une infinité de points de $\Gamma.o$. En particulier, Λ_{rad} est inclus dans l'ensemble des points limites horosphériques, noté Λ_{hor} .

Une isométrie de $PSL(2, \mathbb{R})$ est dite *hyperbolique* si elle fixe exactement deux points de S^1 , *parabolique* si elle fixe exactement un point de S^1 , et *elliptique* dans les autres cas. On note $\Lambda_p \subset \Lambda_\Gamma$ l'ensemble des points limites *paraboliques*, i.e. les points fixes d'une isométrie parabolique de Γ .

Toute surface hyperbolique orientée est le quotient $S = \Gamma \backslash \mathbb{D}$ de \mathbb{D} par un sous-groupe discret Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ sans élément elliptique, et son fibré unitaire tangent $T^1S = \Gamma \backslash T^1\mathbb{D}$ s'identifie à $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$.

Nous supposons toujours Γ *non élémentaire*, i.e. $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$.

Quand S est compacte, alors $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} = S^1$. La surface est dite *convexe-cocompacte* quand Γ est finiment engendré et ne contient que des isométries hyperboliques. Dans ce cas, $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}}$ est strictement inclus dans S^1 , et Γ agit de manière cocompacte sur l'ensemble $(\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diagonale} \times \mathbb{R} \subset T^1\mathbb{D}$. Quand S est de volume fini, ses bouts sont uniquement des points isométriques à $\{z \in \mathbb{H}, \text{Im}|z| > 1\} / \langle z \mapsto z + 1 \rangle$, et $\Lambda_\Gamma = \Lambda_{\text{rad}} \sqcup \Lambda_p = S^1$.

Flots géodésique et horocyclique

Une géodésique hyperbolique de \mathbb{D} est un diamètre ou un demi-cercle orthogonal à S^1 . Un vecteur $v \in T^1\mathbb{D}$ est tangent à une unique géodésique, et orthogonal à exactement deux horocycles passant par son point base, tangents à S^1 respectivement en v^+ et v^- . L'ensemble des vecteurs $w \in T^1\mathbb{D}$ tels que $w^+ = v^+$ et dont le point base appartient à ce dernier horocycle est l'*horocycle fortement stable*, ou variété fortement stable, de v , noté $W^{ss}(v) = \{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$. L'*horocycle fortement instable* est défini de manière analogue.

Le *flot géodésique* $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agit sur $T^1\mathbb{D}$ en déplaçant un vecteur v d'une distance t le long de la géodésique qu'il définit. Dans l'identification de $T^1\mathbb{D}$ avec $PSL(2, \mathbb{R})$, ce flot correspond à l'action par multiplication à droite du sous-groupe à un paramètre

$$A = \left\{ a_t := \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le *flot horocyclique stable* $(h^s)_{s \in \mathbb{R}}$ agit sur $T^1\mathbb{D}$ en déplaçant un vecteur v d'une distance $|s|$ le long de son horocycle fortement stable. Il y a deux orientations possibles pour un tel flot, et nous choisissons celle qui correspond à l'action à droite du

groupe à un paramètre

$$N = \left\{ n_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

sur $PSL(2, \mathbb{R})$. Ce flot fait tourner les vecteurs le long de leur horocycle fortement stable, de sorte que $\{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$ décrit tout l'horocycle fortement stable.

De plus, pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, ces flots géodésique et horocyclique satisfont la relation fondamentale suivante :

$$g^t \circ h^s = h^{se^{-t}} \circ g^t. \quad (2.1.1)$$

Remarque 2.2 Avec notre choix d'orientation de S^1 , quand $s \rightarrow +\infty$, si $u \in T^1\mathbb{D}$ et $u_s^- \in S^1$ est l'extrémité négative de la géodésique déterminée par $h^s u$, alors u_s^- converge vers u^+ , avec $u_s^- \leq u^+$, si S^1 est orienté dans le sens trigonométrique, ce que nous supposons désormais.

Ces deux actions à droite commutent avec l'action à gauche de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur lui-même par multiplication, de sorte qu'elles sont bien définies au quotient sur $T^1S \simeq \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$.

Définition 2.3 Soit $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot agissant par homéomorphismes sur un espace topologique X . L'ensemble non errant de ϕ est l'ensemble des $x \in X$ tels que pour tout voisinage V de x , il existe une suite $t_n \rightarrow +\infty$ tq $\phi^{t_n} V \cap V \neq \emptyset$.

Dans [10], nous avons rédigé le lemme suivant, classique pour l'essentiel.

Lemme 2.4 L'ensemble non-errant du flot géodésique agissant sur T^1S est $\Omega := \Gamma \backslash ((\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma) \setminus \text{Diagonale} \times \mathbb{R})$. L'ensemble non errant du flot horocyclique agissant sur T^1S est $\mathcal{E} := \Gamma \backslash ((\Lambda_\Gamma \times S^1) \setminus \text{Diagonale} \times \mathbb{R})$. On a de plus $\mathcal{E} = \bigcup_{s \in \mathbb{R}} h^s \Omega = \overline{\bigcup_{s \geq 0} h^s \Omega}$.

Rappelons que $\{h^s v, s \in \mathbb{R}\}$ est compact si et seulement si $v^- \in \Lambda_p$, et dense dans \mathcal{E} si et seulement si $v^- \in \Lambda_{\text{hor}}$. Notons $W_+^{ss}(v) = \{h^s v, s \geq 0\}$ le demi horocycle positif de v .

2.1.2 Vecteurs dont la géodésique est périodique

L'exemple type de vecteur $v \in T^1S$ dont l'horocycle $(h^s v)_{s \geq 0}$ n'est pas dense est un vecteur v tangent à la géodésique périodique bordant une *trompette*.

Rappelons en effet qu'une trompette est isométrique à $\{z \in \mathbb{H}, \text{Re}(z) \geq 0\} / \{z \mapsto az\}$, $a > 1$, et la géodésique $\text{Re}(z) = 0$ passe au quotient en une géodésique périodique bordant la trompette. Une géodésique croisant cette géodésique périodique et entrant dans la trompette n'en ressortira jamais. En particulier, l'ensemble limite Λ_Γ vu dans $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ n'intersecte pas \mathbb{R}_+^* .

Un horocycle centré dans \mathbb{R}_+^* , projeté sur S , restera dans la trompette sauf au plus pendant un intervalle de temps fini. Un horocycle centré en 0, vu dans S , aura une moitié qui n'entrera pas dans la trompette, et l'autre côté qui restera dans la trompette sans jamais ressortir.

Plus généralement, $(h^s v)_{s \geq 0}$ ne peut pas être dense si v^+ est la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$. Si S est géométriquement finie, les extrémités d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ sont hyperboliques; ce sont les extrémités de l'axe d'un relevé de la géodésique bordant la trompette. Ce n'est pas nécessairement le cas sur une surface quelconque. On peut considérer par exemple (exemple donné par M. Peigné) le groupe $\Gamma = \langle \alpha^n h \alpha^{-n}, n \in \mathbb{Z} \rangle$, où h et α sont deux isométries hyperboliques en position Schottky, et $\alpha \notin \Gamma$, de sorte que ses points fixes α^- et α^+ sont les extrémités d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$, sans que cela corresponde à une trompette de la surface quotient.

Dans [10], nous démontrons tout d'abord la proposition suivante, qui sert à démontrer les résultats généraux.

Proposition 2.5 ([10]) *Soit S une surface hyperbolique orientée. Si $p \in \Omega$ est un vecteur périodique pour le flot géodésique, son demi-horocycle positif $(h^s(p))_{s \geq 0}$ est dense dans l'ensemble non-errant \mathcal{E} du flot horocyclique ssi p^+ n'est pas la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$.*

Cette proposition est vraie même dans le cas d'une surface S élémentaire, mais sans grand intérêt alors.

Dans les paragraphes suivants, nous étendrons le résultat à quasiment tous les vecteurs $v \in \mathcal{E}$, non nécessairement périodiques pour le flot géodésique.

On a vu qu'une des deux implications de cette proposition est claire. L'idée de la démonstration de l'autre implication est la suivante.

* Rappelons qu'il existe des géodésiques denses dans Ω . En particulier, il existe $w \in \Omega$, t.q. $(g^{-t}w)_{t \geq 0}$ est dense dans Ω .

* Si p^+ n'est pas la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$, cela signifie que nous pouvons trouver un relevé \tilde{w} de w t.q. w^- appartient à l'intervalle $[p^-, p^+]$, le cercle S^1 étant toujours orienté dans le sens trigonométrique, et est aussi proche que l'on veut de p^+ . En particulier, il existe $s \geq 0$ assez grand, t.q. $(g^{-t}h^s p)_{t \geq 0}$ est dense dans Ω .

* Comme $\mathcal{E} = \overline{\cup_{s \geq 0} h^s \Omega}$, on en déduit que $\cup_{t \in \mathbb{R}} \cup_{s \geq 0} g^t h^s p$ est dense dans \mathcal{E} .

* En utilisant la non-arithméticité du spectre des longueurs du flot géodésique, on démontre que $\cup_{s \geq 0} h^s p$ est dense dans $\cup_{t \in \mathbb{R}} \cup_{s \geq 0} g^t h^s p$, ce qui conclut la preuve.

Pour cela, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve un autre vecteur (g^t) -périodique $p_0 \in \Omega$, t.q. il existe des entiers $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $|ml(p) + nl(p_0)| \leq \varepsilon$. À l'aide de ces deux orbites périodiques, en utilisant les propriétés de transitivité, de produit local et le lemme de fermeture pour le flot géodésique (voir chapitre 5 pour des descriptions détaillées de ces propriétés), on peut construire une famille de vecteurs $v_k \in \cup_{s \geq 0} h^s p$, qui spiralent alternativement un certain nombre de tours autour des orbites de p et p_0 , et en jouant sur ce nombre de tours, on s'assure que cette famille est ε -dense dans l'orbite de p par le flot géodésique. Cette construction doit simplement bien tenir compte du fait qu'on veut s'assurer de rester dans le demi-horocycle positif de p , ce qui est possible du fait que p^+ n'est pas la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$.

2.1.3 Vecteurs horosphériques à droite

Si $v \in T^1\mathbb{D}$, soient v^\pm ses extrémités dans $\partial\mathbb{D}$, $Hor(v) \subset \mathbb{D}$ l'horoboule centrée en v^+ et passant par le point base $\pi(v)$ de v , et $Hor^+(v) \subset Hor(v)$ la demi-horoboule droite, i.e. l'ensemble des points base des vecteurs de $\cup_{t \geq 0} \cup_{s \geq 0} h^s g^t v = \cup_{t \geq 0} \cup_{s \geq 0} g^t h^s v$ (d'après la relation (2.1.1)).

Si $v \in T^1\mathbb{D}$, et $\alpha > 0$, le cône de largeur α autour de v est l'ensemble $\mathcal{C}(v, \alpha)$ des points $x \in Hor(v)$ à distance (hyperbolique) au plus α du rayon géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$. Il s'agit de l'intersection de $Hor(v)$ avec un cône euclidien.

Un vecteur $v \in T^1S$ est *horocyclique à droite* s'il admet un relevé $\tilde{v} \in T^1\mathbb{D}$, tel que pour tous $\alpha > 0$ et $D > 0$, l'orbite $\Gamma.o$ intersecte la partie droite de l'horoboule $Hor^+(g^D \tilde{v})$ moins le cône $\mathcal{C}(g^D \tilde{v}, \alpha)$. Un point $\xi \in \Lambda_\Gamma$ est *horocyclique à droite* s'il existe $v \in T^1S$ horocyclique à droite tel que $\xi = v^+$.

Pour mémoire rappelons qu'un vecteur $v \in T^1S$ est *horosphérique* si toutes les horoboules $Hor(g^D \tilde{v})$ contiennent une infinité de points de $\Gamma.o$, et que cela équivaut à la densité de l'horocycle $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ dans \mathcal{E} .

Pour démontrer les théorèmes sur la densité des demi-horocycles, nous nous appuyons sur la proposition suivante.

Proposition 2.6 ([10]) *Soit S une surface hyperbolique. Un vecteur $v \in T^1S$ est horocyclique à droite si et seulement si $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} .*

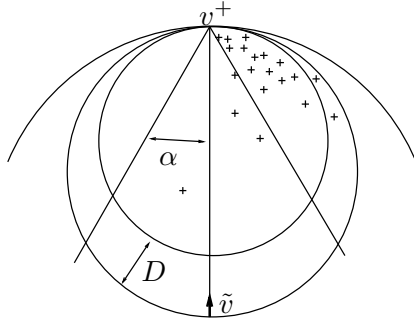


FIGURE 2.2 – Vecteur horocyclique à droite

Nous ne donnons pas l'idée de la preuve, inspirée de [Cou05]. Le seul point important ici est de garder trace de la droite et de la gauche ; ceci est détaillé dans [10].

2.1.4 Densité des demi-horocycles

Lorsque la surface S est géométriquement finie, dans [10, thm 1.1], nous démontrons que si $u \in \mathcal{E}$ est un vecteur dont l'horocycle complet $(h^s u)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense dans \mathcal{E} , alors $(h^s u)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} si et seulement si u^+ n'est pas la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$. Ceci se démontre facilement grâce aux deux propositions ci-dessus, du fait que dans ce cas, les intervalles de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$ sont tous du type $[p^-, p^+]$, où p^\pm sont les extrémités d'un axe d'isométrie hyperbolique qui donne lieu au quotient à une géodésique périodique bordant une trompette.

Hedlund s'était déjà intéressé à la question de la densité des demi-horocycles, dans [H36]. Il avait montré que lorsque la surface est de première espèce, i.e. $\Lambda_\Gamma = S^1$, et lorsque v est radial, i.e. $(g^t v)_{t \geq 0}$ revient infiniment souvent dans un compact, alors $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont denses dans $T^1 S$.

Dans [12, thm 1.1], nous avons repris sa méthode, et nous avons pu la généraliser sans hypothèse sur S (autre que la non-élémentarité). Autrement dit, nous avons démontré que si v est un vecteur radial et si v^+ n'est pas la deuxième extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$, alors $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} .

Mais nous avons également obtenu un résultat plus général [12, thm 1.2], et nous nous contenterons ici de détailler ce dernier.

Théorème 2.7 ([12]) *Soit S une surface hyperbolique non élémentaire. Soit $v \in \mathcal{E}$. S'il existe deux constantes $L > 0$ et $0 < \alpha_0 < \pi/2$ telles que la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur au plus L avec un angle d'intersection au moins α_0 , alors $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont simultanément denses (ou pas) dans \mathcal{E} .*

Les géodésiques périodiques intersectées peuvent être deux à deux distinctes ou non, elles peuvent même être toutes confondues, mais dans tous les cas, $(g^t v)_{t \geq 0}$ doit les intersecter une infinité de fois.

Pour démontrer le théorème, nous utilisons la caractérisation obtenue à la proposition 2.6, et nous souhaitons montrer que si v est horosphérique à droite, alors il est horosphérique à gauche (et réciproquement).

Pour donner l'idée sans complication technique, imaginons que v est horosphérique à droite et que $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte orthogonalement une suite de géodésiques périodiques de longueur bornée.

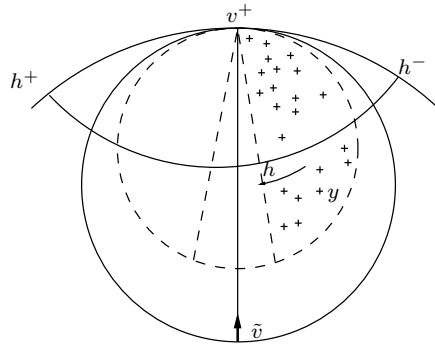


FIGURE 2.3 – Démonstration du théorème 2.7

Relevons v en \tilde{v} . Dire que v est horosphérique à droite signifie que pour tous $D > 0$, $\alpha > 0$, il existe une infinité de points de $\Gamma.o$ dans l'horodisque rétréci $Hor^+(g^D \tilde{v}) \setminus \mathcal{C}(\tilde{v}, \alpha)$. Fixons D et α grands devant la borne L sur les longueurs des géodésiques périodiques intersectées.

Soit alors $y = \gamma.o$ un point dans $Hor^+(g^D v) \setminus \mathcal{C}(v, \alpha)$. Comme $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur au plus L , sur $T^1 \mathbb{D}$, on peut trouver un axe $(h^- h^+)$ d'une isométrie hyperbolique h , qui se projette sur une telle

géodésique, et tel que y est dans la composante connexe bornée de $Hor^+(g^D v) \setminus \mathcal{C}(v, \alpha)$ délimitée par cet axe (cf figure 2.3).

On suppose ici que v^+ est dans l'intervalle $[h^- h^+]$, le bord étant toujours orienté dans le sens trigonométrique. L'isométrie h translate le long de son axe d'une distance au plus L .

Il est alors possible de montrer qu'une puissance adaptée de h va envoyer $y = \gamma.o$ dans $Hor^-(g^{D \pm cste} v) \setminus \mathcal{C}(v, \alpha \pm cste)$, la constante dépendant de L , α_0 , et de la géométrie de \mathbb{D} , mais pas de h . Ce passage est intuitivement clair, mais géométriquement délicat à traiter soigneusement. Nous renvoyons à [12] pour les détails.

2.1.5 Un exemple

L'hypothèse sur le vecteur v dans le théorème ci-dessus est quasiment optimale. Une hypothèse similaire apparaît dans [S10].

Nous construisons dans [12, thm 1.3] un contre-exemple au résultat du théorème 2.7, à savoir un vecteur $v \in \mathcal{E}$ qui est horocyclique d'un côté mais pas de l'autre, tel que v^+ n'est pas l'extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$, et dont la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte une infinité de géodésiques périodiques mais de longueurs non bornées.

Nous présentons cet exemple ci-dessous. En revanche, il n'est pas clair si l'hypothèse de minoration des angles d'intersection de $(g^t v)_{t \geq 0}$ est nécessaire ou pas. Au vu de la proposition 2.5, on peut penser que si $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur bornée avec des angles tendant vers 0, le résultat devrait rester vrai.

L'idée de la construction, dans le demi-plan hyperbolique \mathbb{H} , est la suivante. On prend $v^+ = \infty$, $v^- = 0$, $\pi(v) = i$. Et on étudie l'orbite de $o = i$. On choisit sur \mathbb{R}_+ des demi-cercles C_n^+ deux à deux tangents, de rayon euclidien borné, disons 1, centrés en $2n + 1$, $n \geq 0$, allant jusqu'à l'infini. On choisit sur \mathbb{R}_- des demi-cercles C_n^- tangents deux à deux, centrés en $-x_n$ de rayon $R_n \rightarrow +\infty$. Par une récurrence immédiate, on a $x_1 = R_1$, et $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2R_k + R_n$.

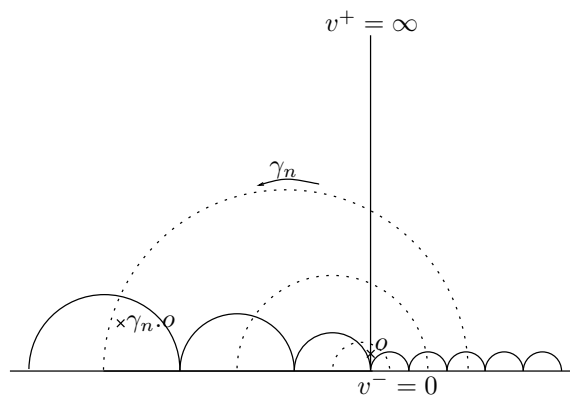


FIGURE 2.4 – Un contre-exemple

On choisit des isométries hyperboliques γ_n de longueurs de plus en plus grandes, de points fixes $\gamma_n^- = 2n + 1$ et $\gamma_n^+ = -x_n$, et envoyant C_n^+ sur C_n^- . Et on considère le groupe Γ engendré par les γ_n , $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour différents choix de suites $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

on vérifie que le vecteur v est horosphérique à gauche et pas à droite. Par exemple, les suites $r_n = n$ ou bien $r_n = \alpha^n$, avec $\alpha > 1$ conviennent.

Dans cet exemple, la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ au quotient va intersecter une infinité de géodésiques périodiques de longueurs non bornées, suivant des angles tendant vers 0. Mais il est très facile de modifier l'exemple pour obtenir des angles qui ne tendent pas vers 0. Pour cela, il suffit de modifier les cercles C_n^+ en les centrant symétriquement des C_n^- , en x_n . Alors $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte les axes des γ_n orthogonalement, et on peut vérifier que v reste horocyclique à gauche mais pas à droite.

2.2 Equidistribution des demi-horocycles d'une surface géométriquement finie

Dans ce paragraphe, nous supposons que S est une surface hyperbolique *géométriquement finie* non élémentaire, et nous revenons sur le théorème d'équidistribution des demi-horocycles obtenu dans [10], comme généralisation naturelle du théorème d'équidistribution obtenu dans [5] pour les horocycles complets.

Une fois démontrés les résultats de densité de demi-horocycles décrits ci-dessus, les résultats d'équidistribution de [10] pour les demi-horocycles ne sont qu'une extension facile de mes travaux [4,5], issus de ma thèse, sur la non divergence et l'équidistribution des horocycles. Pour cette raison, nous avons présenté dans le paragraphe 4 de [10] les grandes lignes des démonstrations, de manière synthétique, et nous n'y reviendrons pas dans ce mémoire. Nous nous contentons donc d'une présentation des énoncés principaux (théorèmes 2.9, 2.10 et 2.8).

Il découle des travaux de Burger [Bu90] et Roblin [Ro03] qu'il existe une unique mesure invariante par le flot horocyclique, ergodique, de support \mathcal{E} . Nous la notons m^{BR} .

Etant donné un vecteur $v \in T^1 S$, trois cas peuvent se produire.

1. Si $v \notin \mathcal{E}$, son orbite est errante, plongée dans $T^1 S$. Cette orbite porte une mesure invariante, ergodique, infinie, complètement dissipative, la mesure de Lebesgue, et ne peut pas s'équidistribuer vers elle.
2. Si $v \in \mathcal{E}$ est un vecteur périodique pour le flot horocyclique, alors son orbite porte une mesure invariante, ergodique, finie, conservative, la mesure de Lebesgue, et cette orbite s'équidistribue clairement vers la mesure en question.
3. Si $v \in \mathcal{E}$ n'est pas périodique, alors son horocycle $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense dans \mathcal{E} , le théorème 1.1 de [10] nous dit que les deux demi-horocycles $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont également denses dans \mathcal{E} , sauf obstruction triviale si v^+ est une extrémité d'un intervalle de $S^1 \setminus \Lambda_\Gamma$, et le théorème 2.8 ci-dessous affirme que lorsque ces demi-horocycles sont denses, alors ils sont équidistribués vers la mesure m^{BR} .

Théorème 2.8 ([10]) *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie non élémentaire, et $u \in T^1 S$ t.q. $(h^s u)_{s \geq 0}$ est dense dans l'ensemble non errant \mathcal{E} du flot horocyclique. Alors $(h^s u)_{s \geq 0}$ est équidistribué vers l'unique mesure invariante ergodique m^{BR} de support plein dans \mathcal{E} . Autrement dit, pour toutes fonctions continues*

à support compact $f, g : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\int_{T^1S} g dm^{BR} > 0$, on a

$$\frac{\int_0^T f \circ h^s u ds}{\int_0^T g \circ h^s u ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1S} f dm^{BR}}{\int_{T^1S} g dm^{BR}}, \quad \text{quand } T \rightarrow +\infty.$$

La stratégie de démonstration de ce théorème est évoquée ci-dessous. D'abord, on considère d'autres moyennes sur l'horocycle $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$. On montre que ces moyennes forment une suite « tendue », i.e. leurs valeurs d'adhérence sont des probabilités. Puis on montre qu'elles sont équidistribuées vers la mesure de Patterson-Sullivan, mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Enfin, à l'aide de ce résultat d'équidistribution auxiliaire, on montre le théorème 2.8.

2.2.1 Quelques mesures importantes sur Ω et \mathcal{E}

La mesure de Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan, que nous notons m^{ps} , est une mesure invariante par le flot géodésique, ergodique, de support Ω , finie (voir par exemple [Su84]). C'est la mesure d'entropie maximale du flot géodésique. Dès que S est géométriquement finie, mais de volume infini, cette mesure n'est pas invariante par le flot horocyclique. D'ailleurs, dans ce cas, Ω est strictement inclus dans \mathcal{E} , et n'est pas invariant par le flot horocyclique.

La mesure de Burger-Roblin, notée m^{BR} , est l'unique mesure invariante par le flot horocyclique, ergodique, de support \mathcal{E} . Elle est infinie.

Ces deux mesures sont très liées. Utilisons pour le voir les descriptions de Ω et \mathcal{E} données par le lemme 2.4. Les horocycles forment un feuilletage de T^1S et de \mathcal{E} de dimension 1. Localement, dans une *boîte*, i.e. une carte du feuilletage notée $B = T \times P$, où T est une transversale au feuilletage horocyclique, et P est une feuille du feuilletage induit sur la boîte B , les mesures m^{ps} et m^{BR} s'écrivent de la manière suivante.

Si $f : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, de support compact inclus dans la boîte B , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_{T^1S} f dm^{ps} &= \int_T \left(\int_{\{t\} \times P} f(h^s t) d\mu_H^{ps}(h^s t) \right) d\mu_T^{ps}(t) \quad \text{et} \\ \int_{T^1S} f dm^{BR} &= \int_T \left(\int_{\{t\} \times P} f(h^s t) ds \right) d\mu_T^{ps}(t), \end{aligned}$$

où (μ_T^{ps}) est, à constante multiplicative près, l'unique famille de mesures sur les transversales au feuilletage horocyclique de T^1S , invariantes par l'holonomie du feuilletage, μ_H^{ps} est la mesure induite par la mesure de Patterson-Sullivan sur les horocycles et ds est la mesure associée au paramétrage du flot horocyclique sur les horocycles.

Nous renvoyons à [10], paragraphe 4, pour une présentation plus détaillée de ces mesures. Nous souhaitons ici mettre en valeur le fait que les mesures m^{ps} et m^{BR} induisent la même mesure sur les transversales aux orbites du flot horocyclique, et ne diffèrent que par la mesure qu'elles induisent sur chaque horocycle.

Pour établir le théorème 2.8, nous fixons l'indicatrice $g = \mathbf{1}_K$ d'un gros compact $K \subset T^1S$, un vecteur $v \in \mathcal{E}$ dont le demi-horocycle $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans \mathcal{E} , et

nous étudions les moyennes

$$M_{t,v}^{+,K}(f) = \frac{\int_0^t f \circ h^s v \, ds}{\int_0^t \mathbf{1}_K \circ h^s v \, ds} \quad \text{et} \quad M_{t,v}^+(f) = \frac{1}{\mu_H^{ps}((h^s v)_{0 \leq s \leq t})} \int_{(h^s v)_{0 \leq s \leq t}} f \, d\mu_H^{ps}.$$

2.2.2 Les étapes clé de la démonstration

Pour établir le théorème 2.8, nous souhaitons montrer que les moyennes $(M_{t,v}^{+,K})_{t \geq 0}$ vues comme mesures de probabilité sur le compact K convergent faiblement vers $\frac{1}{m^{BR}(K)} m|_K^{BR}$. Pour cela, nous montrons d'abord

Théorème 2.9 ([10]) *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie non élémentaire, et $v \in T^1 S$ t.q. $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans l'ensemble non errant \mathcal{E} du flot horocyclique. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_{\varepsilon,v} \subset \Omega$ et $t_0 > 0$ tels que pour $t \geq t_0$, $M_{t,v}^+(K_{\varepsilon,v}) \geq 1 - \varepsilon$.*

Ceci signifie que toutes les valeurs d'adhérence quand $t \rightarrow +\infty$ des moyennes $(M_{t,v}^+)$ vues comme probabilités sur Ω , sont des probabilités. C'est le résultat techniquement le plus difficile à obtenir. Les arguments pour démontrer cet énoncé dans [10] sont sensiblement identiques à ceux de [4], à quelques détails près.

Du fait de la connaissance qu'on a des mesures transverses invariantes par l'holonomie du feuilletage horocyclique, il est relativement aisé d'en déduire le théorème d'équidistribution suivant.

Théorème 2.10 ([10]) *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie non élémentaire, et $v \in T^1 S$ t.q. $(h^s v)_{s \geq 0}$ est dense dans l'ensemble non errant \mathcal{E} du flot horocyclique. Alors pour toute fonction $\psi : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, on a*

$$M_{t,v}^+(\psi) \rightarrow \int_{T^1 S} \psi \, dm^{ps}, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty.$$

Du fait de la grande analogie entre les moyennes $(M_{t,v}^+)$ et les moyennes $(M_{t,v}^{+,K})$ il est ensuite possible de déduire le théorème 2.8 du théorème 2.10.

2.2.3 Retour sur l'équidistribution des horocycles d'une surface géométriquement finie

Dans [13], avec François Maucourant, nous avons eu besoin d'un équivalent d'intégrales de Birkhoff du type $\int_{-t}^t f \circ h^s \, ds$. Un retour attentif sur la démonstration des résultats 2.10 et 2.8, et surtout sur le passage de l'un à l'autre, nous a permis d'obtenir l'énoncé suivant.

Théorème 2.11 ([13]) *Soit S une surface hyperbolique géométriquement finie, non élémentaire. Soit $v \in \mathcal{E}$ un vecteur tel que $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ est dense dans \mathcal{E} . Soit $f : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Alors on a*

$$\int_{-t}^t f(h^s v) \, ds \sim \frac{\int_{T^1 S} f \, dm^{BR}}{m^{ps}(T^1 S)} \mu_H^{ps}((h^s v)_{|s| \leq t}) \quad \text{quand } t \rightarrow +\infty.$$

Dans [13], nous avons besoin de l'énoncé pour des horocycles symétriques $(h^s v)_{|s| \leq t}$. Mais il est tout à fait probable que cet énoncé soit également vrai pour des demi-horocycles denses $(h^s v)_{0 \leq s \leq t}$. Nous renvoyons à [13] pour des variantes en dimension supérieure.

Chapitre 3

Equidistribution des horocycles sur des revêtements abéliens de surfaces compactes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons le travail [9] effectué en collaboration avec Omri Sarig.

Dans le chapitre précédent, ainsi que dans les travaux [1,4,5,10], nous nous sommes intéressée à la question de l'équidistribution des horocycles dans une situation où, essentiellement, le flot horocyclique admet une unique mesure invariante ergodique intéressante, la mesure dite de Burger-Roblin, qui a pour support l'ensemble non errant du flot horocyclique.

En fait, dans [Ro03], Roblin a démontré que, sous réserve que la mesure de Patterson-Sullivan soit finie, cette mesure est l'unique mesure invariante ergodique pour le flot horocyclique qui donne mesure totale à l'ensemble des vecteurs *radiaux*, i.e. l'ensemble des vecteurs v dont la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ revient infiniment souvent dans un compact.

Dès que la surface S considérée n'est plus géométriquement finie, il existe a priori « beaucoup » de vecteurs dont la géodésique finit par sortir de tout compact.

Nous considérons ici une surface S qui est le \mathbb{Z}^d -revêtement d'une surface compacte S_0 . Très schématiquement, cela signifie que, vue de loin, la surface S ressemble au réseau \mathbb{Z}^d sur lequel on aurait mis, en chaque sommet, une copie de la surface compacte S_0 . Dans ces conditions, le flot géodésique, à petite échelle, est toujours un flot hyperbolique, alors qu'à grande échelle, son comportement est plutôt celui d'une marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d .

Rappelons ici que les orbites du flot horocyclique sont également les variétés fortement stables du flot géodésique. En particulier, si des géodésiques ont des comportements asymptotiques très différents, elles vont être dans le support de mesures ergodiques distinctes pour le flot horocyclique.

Si S est un \mathbb{Z}^d -revêtement d'une surface compacte, une façon de distinguer les comportements asymptotiques des géodésiques est de regarder leur vitesse de fuite dans \mathbb{Z}^d , encore appelée leur *cycle asymptotique*. Étant donné un vecteur v , son cycle

asymptotique $\xi_\infty(v)$ est la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi(g^t v)}{t}$ de son déplacement moyen jusqu'au temps t dans \mathbb{Z}^d , où $\xi(g^t v)$ désigne dans quelle copie de S_0 par un élément de \mathbb{Z}^d se trouve le vecteur $g^t v$.

Il se trouve que ces cycles asymptotiques permettent de décrire toutes les mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique. Et notre résultat consiste à caractériser les vecteurs génériques de ces mesures invariantes en termes de leurs cycles asymptotiques.

3.2 Cadre et résultat

Nous considérons une surface hyperbolique $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ qui est un *revêtement abélien d'une surface hyperbolique compacte* $S_0 = \Gamma_0 \backslash \mathbb{H}$. Autrement dit, S_0 est compacte, et $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ est un sous-groupe distingué de Γ_0 t.q. le quotient Γ_0/Γ est un groupe abélien. Comme S et S_0 sont des surfaces, i.e. des variétés de dimension 2, leurs groupes fondamentaux Γ et Γ_0 ne comportent pas d'éléments elliptiques, et donc n'ont pas de torsion. Nous noterons donc $\Gamma_0/\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$.

Le groupe de revêtement Γ_0/Γ agit transitivement sur les fibres du revêtement $S \rightarrow S_0$. Cette action se relève en une action transitive sur les fibres du revêtement $T^1 S \rightarrow T^1 S_0$. Nous noterons $F_0 \subset T^1 S$ un domaine fondamental connexe pour l'action de Γ_0/Γ sur $T^1 S$. Ce domaine F_0 est supposé en bijection mesurable avec $T^1 S_0$.

Etant donné un vecteur $v \in T^1 S$, nous noterons $\xi(v)$ sa « coordonnée dans \mathbb{Z}^d », i.e. l'unique élément de \mathbb{Z}^d t.q. v est dans l'image de F_0 par $\xi(v)$. Lorsque cette quantité est définie, le *cycle asymptotique de v* est la limite

$$\xi_\infty(v) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi(g^t v)}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\xi(g^t v) - \xi(v)}{t}.$$

Ce cycle asymptotique, introduit et étudié par Schwartzmann [Schw57], est invariant par le groupe de revêtement \mathbb{Z}^d , par le flot géodésique (g^t) et le flot horocyclique (h^s). Vu comme fonction sur le fibré unitaire tangent $T^1 S_0$ de la surface compacte S_0 , il est défini μ -presque sûrement, pour toute mesure de probabilité μ invariante par (g^t) et ergodique. Comme mentionné dans l'introduction, le cycle asymptotique représente le déplacement asymptotique moyen dans \mathbb{Z}^d de l'orbite $(g^t v)_{t \geq 0}$.

Nous noterons C l'ensemble de tous les cycles asymptotiques possibles. Babillot-Ledrappier [Ba-L98bis, prop.2.4] ou [Ba-L98, prop.1.1] ont démontré que l'intérieur $\overset{\circ}{C}$ de C était diffeomorphe à \mathbb{R}^d . De plus, à chaque élément $\Xi \in \overset{\circ}{C}$, ils ont associé une mesure invariante pour le flot horocyclique sur $T^1 S$, qui est infinie, quasi-invariante par le flot géodésique et le groupe de revêtement, de support plein, dont ils ont montré l'ergodicité. Cette mesure n'étant bien définie qu'à constante multiplicative près, nous noterons m_Ξ la mesure normalisée de sorte que $m_\Xi(F_0) = 1$. La mesure de Liouville est la mesure m_0 correspondant au cycle asymptotique nul, i.e. un déplacement asymptotique moyen dans \mathbb{Z}^d nul.

Quelques années plus tard, Omri Sarig a complété leur résultat en montrant que ces mesures étaient les seules (toujours à constante multiplicative près) mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique sur $T^1 S$. Autrement dit, on a le résultat suivant.

Théorème 3.1 (Babillot-Ledrappier [Ba-L98bis], Sarig [S04]) *Soit S un revêtement abélien d'une surface hyperbolique compacte S_0 . L'application $\Xi \in \mathring{C} \mapsto m_\Xi \in \mathcal{M}$ est une bijection de l'intérieur \mathring{C} de l'ensemble C des cycles asymptotiques vers l'ensemble \mathcal{M} des mesures de Radon invariantes ergodiques pour le flot horocyclique sur T^1S , à constante multiplicative près.*

Ainsi, nous disposons d'une classe d'exemples de surfaces pour lesquelles le flot horocyclique est très loin d'être uniquement ergodique, puisque l'ensemble des mesures invariantes ergodiques est en bijection avec \mathbb{R}^d . Néanmoins, les mesures invariantes ergodiques du flot horocyclique sont parfaitement bien identifiées, et correspondent encore, bien sûr, aux différentes manières qu'a une orbite du flot géodésique de partir à l'infini.

Dans ces conditions, dans [9], nous avons voulu comprendre s'il était possible de déterminer les vecteurs génériques pour ces mesures. La réponse est positive, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 3.2 ([9]) *Soit S un revêtement abélien d'une surface hyperbolique compacte S_0 . Soit $v \in T^1S$ un vecteur tel que $\xi_\infty(v) = \Xi \in \mathring{C}$. Alors v est générique pour m_Ξ , au sens où pour toutes fonctions continues à support compact $f, g : T^1S \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\int_{T^1S} g dm_\Xi \neq 0$, on a*

$$\frac{\int_0^T f \circ h^s v ds}{\int_0^T g \circ h^s v ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1S} f dm_\Xi}{\int_{T^1S} g dm_\Xi} \quad \text{quand } T \rightarrow +\infty.$$

Réciproquement, si v est générique pour m_Ξ , alors $\xi_\infty(v) = \Xi$.

Dans les paragraphes suivants, nous allons d'abord expliquer un peu mieux d'où viennent ces mesures m_Ξ , puis donner quelques idées des démonstrations. Commençons par quelques remarques.

1. Les mesures m_Ξ étant infinies, nous parlons de généricité en un sens « quotient », comme dans l'énoncé du théorème ergodique de Hopf. Ainsi, un vecteur v est générique pour m_Ξ s'il l'est pour $c m_\Xi$, pour n'importe quelle constante $c > 0$, de sorte que notre choix de normalisation de m_Ξ n'a aucune importance.
2. Babillot-Ledrappier [Ba-L98bis] avaient déjà démontré que m_Ξ -presque sûrement, $\xi_\infty(v) = \Xi$. Comme les mesures m_Ξ sont ergodiques, le théorème ergodique de Hopf implique donc que m_Ξ -presque tout vecteur $v \in T^1S$ t.q. $\xi_\infty(v) = \Xi$ est générique pour m_Ξ . La première assertion de notre théorème est une « simple » version sûre de leur résultat presque sûr.

En général, il est très difficile de passer d'un résultat de généricité presque sûre, du type théorème de Birkhoff ou théorème de Hopf comme variante en mesure infinie, au même résultat pour *tous* les vecteurs. Il suffit pour s'en convaincre de voir la difficulté à démontrer des théorèmes d'équidistribution comme le théorème 2.8 évoqué au chapitre précédent. Il se trouve qu'ici la difficulté de la démonstration de la première assertion du théorème était essentiellement traitée dans [Ba-L98bis]. Nous en reparlerons au paragraphe 3.5. L'originalité de notre travail réside plus dans la réciproque, expliquée plus en détail dans le paragraphe 3.4.

3. On notera pour comparer avec les questions traitées au chapitre précédent que nous parlons de généricité de demi-horocycles $(h^s v)_{s \geq 0}$. Ceci vient du fait que la surface S est un revêtement d'une surface hyperbolique compacte S_0 , sur laquelle densité ou équidistribution de demi-horocycles $(h^s v)_{s \geq 0}$ ou des horocycles complets $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ sont des notions équivalentes.
4. Si $\xi_\infty(v) \in \partial C$, l'orbite $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ peut être dense dans $T^1 S$ ou non, mais n'est jamais équidistribuée vers l'une des mesures m_Ξ . On sait depuis Eberlein [Eb73] que cette orbite n'est pas dense dans $T^1 S$ si et seulement si la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ est *quasi-minimisante*, i.e. $d(v, g^t v) \geq t - c$, pour une certaine constante $c > 0$ et tout $t \geq 0$.
5. Si v n'admet pas de cycle asymptotique, mais que la suite $(\xi(g^t v)/t)_{t \geq 0}$ admet des valeurs d'adhérence dans $\overset{\circ}{C}$, alors on peut préciser notre résultat de la manière suivante. Si $\frac{\xi(g^{t_n} v)}{t_n} \rightarrow \Xi \in \overset{\circ}{C}$, alors pour toutes fonctions $f, g : T^1 S \rightarrow \mathbb{R}$ continues à support compact telles que $\int_{T^1 S} g dm_\Xi \neq 0$, on a

$$\frac{\int_0^{e^{t_n}} f \circ h^s v ds}{\int_0^{e^{t_n}} g \circ h^s v ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1 S} f dm_\Xi}{\int_{T^1 S} g dm_\Xi} \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

3.3 Formalisme thermodynamique, propriétés des mesures invariantes

Nous renvoyons à [Ba-L98, Ba-L98bis] pour ce paragraphe. Soit μ une mesure de probabilité invariante par le flot géodésique sur $T^1 S_0$. Son *cycle asymptotique* est défini par $\Xi(\mu) = \int_{T^1 S_0} \xi_\infty(w) d\mu(w)$. Identifions \mathbb{R}^d avec son dual, et pour un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$, notons $\varphi = \varphi_u : v \mapsto \langle v, u \rangle$ la forme linéaire associée. Considérons l'application

$$u \in \mathbb{R}^d \mapsto P(u) = \sup\{h_\mu(g) + \langle u, \Xi(\mu) \rangle, \mu \text{ proba. } (g^t) \text{ inv. sur } T^1 S_0\}.$$

On a alors

Proposition 3.3 (Babillot-Ledrappier [Ba-L98, Ba-L98bis]) *L'application P est analytique sur \mathbb{R}^d et $\nabla P : \mathbb{R}^d \rightarrow \overset{\circ}{C}$ est un difféomorphisme.*

Étant donné $u = u_\varphi \in \mathbb{R}^d$, ou bien $\varphi = \varphi_u \in (\mathbb{R}^d)^*$, il existe une unique mesure de probabilité invariante ergodique pour le flot géodésique sur $T^1 S_0$, que nous noterons μ_φ , qui réalise le supremum dans la définition de $P(u_\varphi)$. Autrement dit, on a

$$P(u_\varphi) = h_{\mu_\varphi}(g) + \varphi(\Xi(\mu_\varphi)) = h_{\mu_\varphi}(g) + \langle u_\varphi, \Xi(\mu_\varphi) \rangle.$$

De plus, le gradient de P vérifie alors $\nabla P(u_\varphi) = \Xi(\mu_\varphi)$, et on note $\Xi_\varphi := \Xi(\mu_\varphi)$. La mesure μ_φ a pour support l'ensemble des vecteurs $v \in T^1 S_0$ de cycle $\Xi_\varphi : \mu_\varphi$ -p.s., on a $\xi_\infty(v) = \Xi_\varphi$.

Cette mesure μ_φ n'est absolument pas invariante par le flot horocyclique (h^s) , sauf dans le cas particulier où $\varphi = 0$, et μ_φ coïncide avec la mesure de Liouville sur $T^1 S_0$. (Et encore, c'est alors une coïncidence due à l'hypothèse de courbure

constante, mais qui serait fausse en courbure variable, où ce que nous décrivons est encore valide.)

C'est une mesure de Gibbs associée au potentiel $v \in T^1S_0 \mapsto \langle u, \xi_\infty(v) \rangle$. Notons $\tilde{\mu}_\varphi$ la mesure relevée de μ_φ sur $T^1\mathbb{H}$. Dans les coordonnées de Hopf, cette mesure est équivalente à un produit $\tilde{\mu}_\varphi \sim \nu_\varphi \times \nu_\varphi \times dt$ sur $(\partial\mathbb{H} \times \partial\mathbb{H} \setminus \text{diagonale}) \times \mathbb{R}$, où ν_φ est une mesure sur le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}$, quasi-invariante par Γ_0 , et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur S^1 . La densité de $\tilde{\mu}_\varphi$ par rapport à ce produit est une fonction continue.

En modifiant à la fois cette densité et le premier terme du produit, on construit une mesure \tilde{m}_φ équivalente à $ds \times \nu_\varphi \times dt$, où ds désigne la mesure associée au paramétrage du flot horocyclique stable. Il est possible de faire cela judicieusement, de sorte que la mesure \tilde{m}_φ obtenue soit invariante par le flot horocyclique, quasi-invariante par le flot géodésique, et invariante par le groupe Γ . Cette mesure passe donc au quotient en une mesure m_φ sur T^1S , invariante par le flot horocyclique, quasi-invariante par le flot géodésique et le groupe de revêtement. Plus précisément, sur T^1S , on a

$$g_*^t m_\varphi = e^{-P(u_\varphi)t} m_\varphi \quad \text{et} \quad a_* m_\varphi = e^{\varphi(a)} m_\varphi \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \in \Gamma_0/\Gamma.$$

Nous renvoyons à [Ba-L98bis] pour plus de détails.

On a déjà noté que sur T^1S_0 , μ_φ -p.s., on a $\xi_\infty(v) = \Xi_\varphi$. De plus, le cycle asymptotique est invariant par les flots horocyclique et géodésique; en d'autres termes, dans les coordonnées de Hopf, il ne dépend que du deuxième facteur, i.e. que de v^+ . Ainsi, vue la construction de m_φ à l'aide de μ_φ , on déduit immédiatement que sur T^1S , m_φ -p.s., on a $\xi_\infty(v) = \Xi_\varphi$.

Remarquons encore qu'il n'est pas possible, en effectuant la construction de \tilde{m}_φ à partir de $\tilde{\mu}_\varphi$, d'obtenir une mesure invariante par le gros groupe Γ_0 . En effet, de telles mesures induiraient au quotient sur T^1S_0 des mesures invariantes par le flot horocyclique, et deux à deux singulières, ce qui est absurde puisque le flot horocyclique est uniquement ergodique sur T^1S_0 .

La famille de mesures m_Ξ , pour $\Xi \in \mathring{C}$ est exactement la famille de mesures m_φ dont la construction vient d'être évoquée, pour $\Xi = \Xi_\varphi = \nabla P(u_\varphi)$.

3.4 Cycle asymptotique d'un vecteur générique

Dans ce paragraphe, nous considérons un vecteur $v \in T^1S$ générique pour m_Ξ , et nous souhaitons montrer que $\xi_\infty(v) = \Xi$.

Dire que v est générique pour m_Ξ signifie que pour toutes fonctions $f, g : T^1S$ continues à support compact, telles que $\int_{T^1S} g dm_\Xi \neq 0$, on a

$$\frac{\int_0^T f \circ h^s v ds}{\int_0^T g \circ h^s v ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1S} f dm_\Xi}{\int_{T^1S} g dm_\Xi} \quad \text{quand } T \rightarrow +\infty.$$

Supposons que le domaine fondamental F_0 choisi pour l'action de $\Gamma_0/\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$ sur T^1S a un bord de mesure nulle : $m_\Xi(\partial F_0) = 0$.

Dire que v est générique pour m_Ξ implique que pour toute fonction continue à support compact $f : F_0 \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\int_0^T f \circ h^s v \, ds}{\int_0^T \mathbf{1}_{F_0} \circ h^s v \, ds} \rightarrow \frac{\int_{T^1 S} f \, dm_\Xi}{m_\Xi(F_0)} \quad \text{quand } T \rightarrow +\infty.$$

Notons λ_v^T la mesure orbitale sur $(h^s v)_{0 \leq s \leq T} \cap F_0$ normalisée en une mesure de probabilité. Nous sommes en train de dire que pour la topologie de la convergence faible sur F_0 , la mesure orbitale λ_v^T tend vers la mesure m_Ξ restreinte à F_0 et normalisée, i.e. $\frac{\mathbf{1}_{F_0}}{m_\Xi(F_0)} m_\Xi$.

3.4.1 Une preuve fausse

Comme λ_v^T tend vers la mesure $\frac{\mathbf{1}_{F_0}}{m_\Xi(F_0)} m_\Xi$, écrivons alors

$$\int_{F_0} \frac{\xi(g^t w)}{t} d\lambda_v^T(w) \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} \int_{F_0} \frac{\xi(g^t w)}{t} dm_\Xi(w).$$

Maintenant, quand $t \rightarrow +\infty$, on a $\frac{\xi(g^t w)}{t} \rightarrow \xi_\infty(w)$, de sorte que le terme de gauche ci-dessus converge vers $\int_{F_0} \xi_\infty(w) d\lambda_v^T(w)$. Le cycle asymptotique étant invariant par le flot horocyclique, il est nécessairement constant égal à $\xi_\infty(v)$ sur l'orbite $(h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$, et donc sur le support de λ_v^T . La limite du terme de gauche quand $t \rightarrow +\infty$ est donc égale à $\xi_\infty(v)$.

Le terme de droite, pour la même raison, converge vers $\int_{F_0} \xi_\infty(w) dm_\Xi = \Xi$.

Autrement dit, si on arrivait à justifier proprement les convergences ci-dessus, mais bien sûr surtout l'interversion de limites quand $t, T \rightarrow +\infty$, on arriverait au résultat.

3.4.2 Une idée de la démonstration

Fixons $\varepsilon > 0$, et cherchons à montrer que $\xi_\infty(v)$ est proche de Ξ , à quelques ε près.

• Notons ξ_N pour le déplacement $\xi \circ g^N - \xi$ effectué pendant un intervalle de temps de longueur N . Du fait que $\xi_\infty(w) = \Xi$, m_Ξ -p.s., on déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q.

$$m_\Xi \left(\left\{ w \in F_0, \left| \frac{\xi_N(w)}{N} - \Xi \right| > \varepsilon \right\} \right) \leq \varepsilon.$$

Fixons donc un tel $N \in \mathbb{N}$.

• Si le domaine fondamental F_0 est bien choisi, l'application $\frac{\xi_N}{N}$ est continue par morceaux. Comme la mesure orbitale λ_v^T converge vers m_Ξ , on en déduit que pour T assez grand, on a

$$\lambda_v^T \left(\left\{ w \in F_0, \left| \frac{\xi_N(w)}{N} - \Xi \right| > \varepsilon \right\} \right) \leq 2\varepsilon.$$

Fixons un tel $T \gg N$.

• Observons que \mathbb{R} et \mathbb{Z}^d sont des groupes abéliens, ce qui permet de dire que la somme des déplacements effectués par la géodésique de w pendant des intervalles

de temps de longueur N entre 0 et t est égale au déplacement total dans l'intervalle de temps $[0, t]$, soit encore

$$\frac{\sum_{k=0}^{\lfloor t/N \rfloor} \xi_N(g^{kN} w)}{\sum_{k=0}^{\lfloor t/N \rfloor} N} \simeq \frac{\xi_t(w)}{t}.$$

• Choisissons maintenant $t = \ln T \gg N$. Pour tout vecteur w dans le support de λ_v^T , on a $w = h^s v$, avec $0 \leq s \leq T$, d'où $d(g^t w, g^t v) \leq 1$, et $\xi(g^t w) \simeq \xi(g^t v)$. Calculons maintenant

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi_t(v)}{t} - \Xi \right| &\simeq \left| \int_{T^1 S} \left(\frac{\xi_t(w)}{t} - \Xi \right) d\lambda_v^T \right| \simeq \left| \int_{T^1 S} \left(\frac{\sum_{k=0}^{\lfloor t/N \rfloor} \xi_N(g^{kN} w)}{\sum_{k=0}^{\lfloor t/N \rfloor} N} - \Xi \right) d\lambda_v^T \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\lfloor t/N \rfloor} \frac{N}{t} \int_{T^1 S} \left| \frac{\xi_N(g^{kN} w)}{N} - \Xi \right| d\lambda_v^T \\ &\leq \sup_{0 \leq k \leq \lfloor t/N \rfloor} \int_{T^1 S} \left| \frac{\xi_N(g^{kN} w)}{N} - \Xi \right| d\lambda_v^T. \end{aligned}$$

• Le lemme clé [9, lemme 3.2] nous dit alors que pour $t = \ln T \gg N$, ce supremum est uniformément borné (pour $0 \leq k \leq \lfloor t/N \rfloor$) par une constante fois ε , ce qui conclut la preuve. Donnons une idée de sa preuve. On sait déjà que

$$\lambda_v^T \left(\left\{ w \in F_0, \left| \frac{\xi_N(w)}{N} - \Xi \right| > \varepsilon \right\} \right) \leq 2\varepsilon.$$

Nous cherchons à obtenir des estimées analogues, en remplaçant w par $g^{kN} w$, uniformément en $0 \leq k \leq \lfloor t/N \rfloor = \lfloor \frac{\ln T}{N} \rfloor$.

Ceci se fait (en dynamique symbolique) en introduisant des applications définies sur des sous-ensembles de $(h^s v)_{0 \leq s \leq t}$, qui « échangent » respectivement les segments géodésiques $(g^\tau w_1)_{0 \leq \tau \leq N}$ et $(g^\tau w_2)_{kN \leq \tau \leq (k+1)N}$ d'une part, et $(g^\tau w_1)_{kN \leq \tau \leq (k+1)N}$ et $(g^\tau w_2)_{0 \leq \tau \leq N}$ d'autre part.

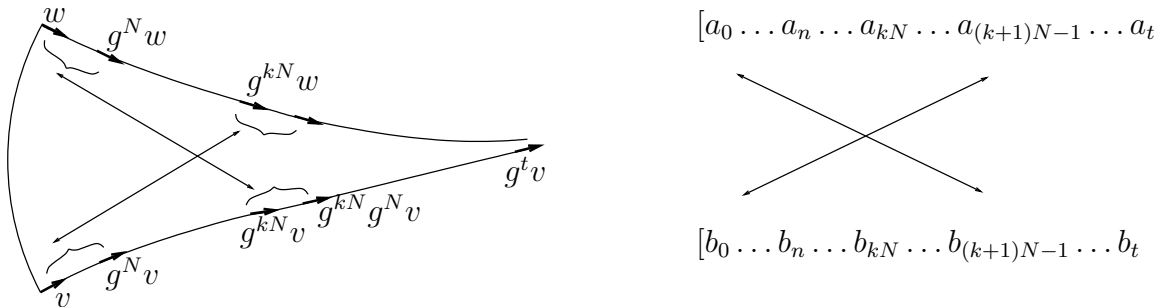


FIGURE 3.1 – Echange de morceaux d'horocycles

En symbolique, ceci revient simplement à un échange de deux intervalles de N lettres. Géométriquement, ces applications ne sont rien d'autre que des composées d'isométries avec un temps uniformément borné du flot géodésique. Et le lemme clé

dont nous avons besoin résulte du fait que nous démontrons que ces applications sont absolument continues, et donc que $\frac{\xi_N(g^{kN}w_1)}{N}$ est assez proche de $\frac{\xi_N(w_2)}{N}$, qui lui-même est très proche de Ξ avec grande probabilité.

Remarquons qu'affirmer que $\lambda_v^T \left(\left\{ w \in F_0, \left| \frac{\xi_N(g^{kN}w)}{N} - \Xi \right| > \varepsilon \right\} \right) \leq C\varepsilon$ uniformément en $0 \leq k \leq [t/N]$ ne donne pas $\sup_{0 \leq k \leq [t/N]} \int_{T^1S} \left| \frac{\xi_N(g^{kN}w)}{N} - \Xi \right| d\lambda_v^T \leq C'\varepsilon$ immédiatement. Mais les détails techniques sans importance ni géométrique ni dynamique sont omis ici.

3.5 Généricité d'un vecteur de cycle asymptotique donné

Étant donné $v \in T^1S$ tel que $\xi_\infty(v) = \Xi \in \overset{\circ}{C}$, nous souhaitons montrer que v est générique pour m_Ξ .

3.5.1 Proposition Clé

La proposition clé ci-dessous est très directement inspirée des travaux de Babillot-Ledrappier [Ba-L98bis], mais aussi de Ledrappier-Sarig [L-S06], eux-mêmes inspirés initialement de travaux de Lalley [La89] (voir aussi [Ba96] et [L01]).

Proposition 3.4 *Soit $\Xi = \Xi_\varphi \in \overset{\circ}{C}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage compact $K_\varphi(\varepsilon)$ de Ξ_φ dans $\overset{\circ}{C}$ tel que pour toutes fonctions $f, g : T^1S \rightarrow \mathbb{R}_+$ continues à support compact, non identiquement nulles, et pour tout $T > 0$ assez grand, on ait*

$$\frac{\xi_{\ln T}(w)}{\ln T} \in K_\varphi(\varepsilon) \implies \frac{\int_0^T f \circ h^s w ds}{\int_0^T g \circ h^s w ds} = e^{\pm\varepsilon} \frac{\int_{T^1S} f dm_\Xi}{\int_{T^1S} g dm_\Xi}.$$

La notation $a(t) = C^{\pm 1}b(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$ signifie $a(t) \in [C^{-1}b(t), Cb(t)]$ quand $t \rightarrow +\infty$.

L'énoncé ne dépend que de la valeur de $\xi_{\ln T}(w)/\ln T$, et pas du tout de w . C'est ce qui nous permet de pouvoir traiter le cas où un vecteur v n'a pas de cycle asymptotique, mais où $(\xi_t(v)/t)$ admet des valeurs d'adhérence (cf la remarque 5 après le théorème 3.2).

3.5.2 Codage

La preuve de cette proposition est symbolique. Pour cela, nous avons besoin d'un bon codage du flot géodésique, pour avoir des résultats pour tous les vecteurs v . Souvent, avoir un codage d'un système dynamique par une dynamique symbolique signifie avoir une conjugaison mesurable qui est presque sûrement bijective. Ceci ne convient pas ici, puisque ça ne permet pas d'obtenir des résultats pour *tous* les vecteurs.

Le codage de Bowen-Series [Bow-Se79, Se1, Se2] du flot géodésique sur T^1S_0 est un codage qui, étant donné un vecteur $v \in T^1S_0$ fixé, associe à tout vecteur $w \in (h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ un unique codage symbolique, excepté pour un nombre dénombrable de tels vecteurs w .

Ce codage permet de décrire le flot géodésique de T^1S_0 comme un flot suspendu au-dessus d'un sous-décalage de type fini. Il est classique ([Ba-L98] par exemple) que ce codage se relève en un codage du flot géodésique de T^1S , qui permet de décrire le flot géodésique de T^1S comme un flot suspendu au-dessus d'une base qui est cette fois un produit gauche du sous-décalage de type fini par le groupe du revêtement.

En d'autres termes, $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est conjugué à l'action par translation de \mathbb{R} sur la troisième composante de $(\Sigma \times \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}) / \sim$, où la relation \sim est donnée par $(x, \xi, t) \sim (\sigma x, \xi + f(x), t - r(x))$, avec $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{Z}^d$ et $r : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions höldériennes. Cette conjugaison est surjective, et « presque » injective, au sens décrit ci-dessus : pour tout $v \in T^1S$, tout vecteur $w \in (h^s v)_{s \in \mathbb{R}}$ admet un unique codage symbolique, excepté pour un nombre dénombrable de tels vecteurs w .

L'intérêt de cette conjugaison est que l'action de \mathbb{Z}^d et les orbites du flot horocyclique sont bien comprises dans cette description symbolique.

3.5.3 Démonstration de la proposition clé

- D'abord, on peut approcher à $e^{\pm \varepsilon}$ près une fonction f continue à support compact par des combinaisons linéaires d'indicatrices $\mathbf{1}_E$ d'ensembles du type $E = [a] \times [0, \varepsilon] \times \{0\} \subset \Sigma \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d$.

- Ensuite, on écrit $\int_0^T \mathbf{1}_E \circ h^s w ds = l(E \cap g^{-\ln T} W^{ss}(g^{\ln T} w))$, où on note $W^{ss}(u)$ une portion de variété fortement stable de longueur fixée (disons 1).

- Comme dans [L-S06], on ramène alors l'étude de cette quantité à celle d'une somme symbolique étudiée dans [Ba-L98bis].

- Les résultats de [Ba-L98bis] nous permettent, lorsque $\frac{\xi_{\ln T}(w)}{\ln T} \in K_\varphi(\varepsilon)$ est proche de Ξ_φ , d'obtenir un équivalent de $\int_0^T \mathbf{1}_E \circ h^s w ds$ à quelques $e^{\pm \varepsilon}$ près, en termes de $m_{\Xi_\varphi}(E)$ multiplié par une quantité indépendante de E , et qui dépend essentiellement de $\frac{\xi_{\ln T}(w)}{\ln T}$ et de T .

Toutes les étapes évoquées ci-dessus permettent de démontrer la proposition clé, et donc la première implication du théorème 3.2.

Chapitre 4

Action linéaire de sous-groupes de type fini de $SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2

Dans le contexte de la géométrie hyperbolique, $PSL(2, \mathbb{R})$ est le groupe des isométries directes du demi-plan hyperbolique, via l'action classique par homographies

$$z \in \mathbb{H} \mapsto \frac{az + b}{cz + d}.$$

Cela dit, le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ est avant tout le groupe des transformations linéaires de \mathbb{R}^2 . Ces deux actions sont reliées par une « dualité » que nous présentons ci-dessous. Étant donné que c'est $PSL(2, \mathbb{R})$ plus que $SL(2, \mathbb{R})$ qui intervient en géométrie hyperbolique, nous nous intéresserons de fait à l'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ induite par l'action linéaire sur \mathbb{R}^2 .

Cette dualité entre ces deux actions est connue et utilisée depuis longtemps. Sans faire la bibliographie du sujet, mentionnons par exemple l'article de Furstenberg [F73] qui démontre l'unique ergodicité du flot horocyclique sur le fibré unitaire tangent d'une surface compacte $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ à l'aide de l'étude des fonctions harmoniques Γ -invariantes sur \mathbb{R}^2 .

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'action d'un groupe discret $\Gamma < PSL(2, \mathbb{R})$ de type fini sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$, et à la distribution de ses orbites. Certaines de ses orbites sont discrètes, d'autres non. Nous renvoyons à l'article récent de Oh-Shah [O-Sh10] pour l'étude des orbites discrètes, et des résultats de comptage de points de ces orbites. Nous nous intéressons à la distribution asymptotique des points des orbites non discrètes de Γ .

Rappelons le premier énoncé sur ce sujet, lorsque Γ est un réseau. Notons $|u|$ la norme l^p , $1 \leq p < \infty$ de $u \in \mathbb{R}^2$, $\|\gamma\|$ la norme l^p de $\gamma \in \Gamma$ vu comme élément de \mathbb{R}^4 , et pour tout $T \geq 0$, notons $\Gamma_T = \{\gamma \in \Gamma, \|\gamma\| \leq T\}$.

Théorème 4.1 (Ledrappier [L99]) *Soit $\Gamma < SL(2, \mathbb{R})$ un réseau contenant $-Id$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ un vecteur dont l'orbite $\Gamma \cdot \mathbf{u}$ est dense dans \mathbb{R}^2 . Alors*

$$\frac{1}{T} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u}) \rightarrow \frac{4}{\lambda(\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R}))} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\mathbf{v})}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} d\mathbf{v} \quad \text{quand } T \rightarrow +\infty,$$

où $\lambda(\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R}))$ est le volume de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{R})$ pour la normalisation usuelle de la mesure de Haar.

Ce résultat a également été obtenu dans [N02], lorsque $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$, par des méthodes arithmétiques. Mentionnons également [L01] dans la situation du chapitre 3 lorsque Γ est le revêtement abélien d'un sous-groupe cocompact de Γ , [L-P03, L-P05] dans le cas de réseaux de $SL(2, \mathbb{C})$ ou $SL(2, \mathbb{Q}_p)$. Ces résultats ont ensuite été étendus à d'autres variétés homogènes [Go04], [Go-W07] ou améliorés par la recherche de termes de reste, par exemple dans [N10], [M-W11].

Nous commençons ci-dessous par rappeler le lien entre l'action linéaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2/\pm et l'action par isométries de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H} . Ensuite, nous énonçons les résultats obtenus dans [13] lorsque Γ est un sous-groupe géométriquement fini de $PSL(2, \mathbb{R})$. Enfin, la méthode de la preuve (classique depuis [L99]) est rappelée au paragraphe 4.3. Elle repose sur le comportement asymptotique d'intégrales de Birkhoff sur les horocycles de $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$, que nous avons présenté au paragraphe 2.2.3.

4.1 Dualité entre l'action linéaire de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 et l'action par isométries de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{H}

Tout le contenu de cette section est classique, et n'est que reformulation de faits écrits dans [L99] ou [M-W11] par exemple, et [13] bien sûr.

4.1.1 Généralités

Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ est difféomorphe au produit $SO(2, \mathbb{R}) \times A \times N$, avec

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \text{et} \quad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Notons encore $K = PSO(2, \mathbb{R}) = SO(2, \mathbb{R})/\{\pm Id\}$.

Dans l'action linéaire de $SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 , l'orbite du vecteur $\mathbf{u}_0 = (1, 0)$ est $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et son stabilisateur est N , de sorte que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ s'identifie naturellement à $SO(2, \mathbb{R}) \times A = SL(2, \mathbb{R})/N$, et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ à $KA = PSL(2, \mathbb{R})/N$.

Si maintenant nous considérons l'action isométrique de $SL(2, \mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré, l'orbite du point i est \mathbb{H} et son stabilisateur est $SO(2, \mathbb{R})$, de sorte que \mathbb{H} s'identifie à $SO(2, \mathbb{R}) \backslash SL(2, \mathbb{R}) \simeq AN$. Cette action par isométries s'étend bien sûr (par différentiation) en une action sur $T^1\mathbb{H}$, et le stabilisateur du vecteur i tangent en i à \mathbb{H} est $\{\pm Id\}$, de sorte qu'on a l'identification classique $T^1\mathbb{H} \simeq PSL(2, \mathbb{R})$.

Tout ceci étant précisé, il existe une section naturelle $\Psi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$ qui à un vecteur $\mathbf{u} = k.a.\mathbf{u}_0$ associe la matrice $ka \in SL(2, \mathbb{R})$ (cf figure 4.1). Cette section peut être calculée explicitement. On a, si $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$,

$$\Psi(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_x & -\mathbf{u}_y/(\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2) \\ \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_x/(\mathbf{u}_x^2 + \mathbf{u}_y^2) \end{pmatrix}.$$

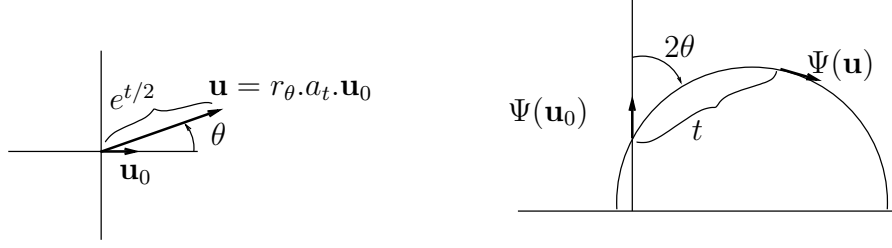


FIGURE 4.1 – La section Ψ , de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ à $T^1\mathbb{H}$

On vérifie immédiatement que $\Psi(e^{t/2}\mathbf{v}) = \Psi(\mathbf{v})a_t$, et que c'est bien une section au sens où $\Psi(\mathbf{v})\mathbf{u}_0 = \mathbf{v}$.

On a vu plus haut que l'espace $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ s'identifie à l'espace $PSL(2, \mathbb{R})/N$ des orbites du flot horocyclique, autrement dit à l'espace \mathcal{H} des horocycles de \mathbb{H} ou $T^1\mathbb{H}$. Cet espace \mathcal{H} s'écrit naturellement comme $\mathcal{H} = \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}$, si on paramètre chaque horocycle par son point base dans $\partial\mathbb{H}$ et un paramètre réel, nul lorsque l'horocycle contient i . La section Ψ permet une identification explicite de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ à $\mathcal{H} = \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ via l'application

$$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\Psi(\mathbf{v})(\infty), 2 \log |\mathbf{v}|) \in \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{H},$$

où $|\cdot|$ est la norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^2 . La bijection inverse de \mathcal{H} dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ s'écrit alors $\Phi : (\xi, t) \rightarrow \pm(e^{t/2} \cos \theta, e^{t/2} \sin \theta)$, où θ vérifie $\cotan \theta = \xi$.

Ces applications, Φ et son inverse sont équivariantes pour les actions de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}/\pm$ et sur \mathcal{H} . Ainsi, si $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et $g \in SL(2, \mathbb{R})$, alors $\Psi(g\mathbf{u})$ et $g\Psi(\mathbf{u})$ définissent la même orbite du flot horocyclique. En particulier, on peut définir un cocycle $c_{\mathbf{u}}(g) \in \mathbb{R}$ par $\Psi(g\mathbf{u})n_{c_{\mathbf{u}}(g)} = g\Psi(\mathbf{u})$. Dans les résultats de ce chapitre, une propriété cruciale de ce cocycle est que sa « taille » peut être reliée à celles de \mathbf{u} , $g\mathbf{u}$, et g . Sans rentrer dans les formules exactes, retenons que nous avons, à une petite erreur près

$$\|g\| = |c_{\mathbf{u}}(g)| \|g\mathbf{u}\| \|\mathbf{u}\| + \text{petit reste},$$

où $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ sont respectivement les normes l^p sur \mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}^4 \supset SL(2, \mathbb{R})$, pour $1 \leq p < \infty$. Cette observation clé est déjà présente dans [L99]. Elle a été précisée pour d'autres normes dans [Go-W07] puis [M-W11].

4.1.2 Groupes géométriquement finis, mesures invariantes et dualité

Rappelons qu'un sous-groupe Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$ est dit *géométriquement fini* s'il est de type fini. Dans ce cas, la surface $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$ se décompose en un nombre fini de trompettes, un nombre fini de cusps, et une partie compacte (voir chapitre 2 pour des définitions). Lorsqu'il n'y a pas de cusps, le groupe Γ est dit *convexe-cocompact*. Dans ce cas, le groupe ne contient que des isométries hyperboliques, l'ensemble limite Λ_Γ n'est composé que de points limites radiaux, et l'ensemble non-errant $\Omega \simeq \Gamma \backslash (\Lambda_\Gamma^2 \setminus \text{diagonale} \times \mathbb{R})$ est compact. Parmi les groupes géométriquement

finis, les réseaux sont ceux qui sont de covolume fini. Ceux-ci ayant été étudiés dans [L99], nous nous intéressons surtout aux groupes de covolume infini.

Nous noterons Γ un sous-groupe discret de $PSL(2, \mathbb{R})$, et Γ_0 le sous-groupe discret de $SL(2, \mathbb{R})$ contenant $-Id$, d'image Γ dans $PSL(2, \mathbb{R})$. Tous les groupes considérés ici sont *non élémentaires*, i.e. non virtuellement abéliens (ce qui équivaut encore à $\#\Lambda_\Gamma = +\infty$), et sans torsion s'il s'agit de sous-groupes de $PSL(2, \mathbb{R})$, ou bien sans autre élément de torsion que $-Id$ s'il s'agit de sous-groupes de $SL(2, \mathbb{R})$.

L'*exposant critique* de Γ (ou Γ_0) est défini par $\delta_\Gamma = \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \#\{\gamma \in \Gamma, d(o, \gamma.o) \leq t\}$, où $o \in \mathbb{H}$ est un point quelconque fixé, et d est la distance hyperbolique usuelle sur \mathbb{H} . Lorsque Γ est convexe-cocompact, $0 < \delta_\Gamma \leq 1$, et lorsque Γ est géométriquement fini, $\frac{1}{2} \leq \delta_\Gamma \leq 1$. Pour de tels groupes géométriquement finis, $\delta_\Gamma = 1$ si et seulement si Γ est un réseau de $PSL(2, \mathbb{R})$.

L'identification de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \pm$ avec l'espace \mathcal{H} des horocycles de $T^1\mathbb{H} \simeq PSL(2, \mathbb{R})$ permet de déduire du fait que les horocycles de $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$ sont soit fermés (périodiques ou errants), soit denses dans l'ensemble non-errant \mathcal{E} du flot horocyclique, que les orbites par Γ_0 des vecteurs de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sont soit discrètes, soit denses dans l'ensemble $\mathcal{C}(\Gamma_0)$ des horocycles de \mathcal{E} .

De la même manière, les mesures Γ -invariantes sur \mathcal{H} donnent lieu à des mesures Γ_0 -invariantes sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Rappelons quelques résultats à ce sujet. Lorsque S est géométriquement finie, Roblin [Ro03] (Burger [Bu90] dans le cas convexe-cocompact) a démontré qu'il existe une unique mesure (h^s)-invariante ergodique de support tout \mathcal{E} sur T^1S , la mesure notée ici m^{BR} . De manière équivalente, il existe une unique mesure Γ -invariante ergodique de support $\Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$ sur l'espace $\mathcal{H} \simeq \partial\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ des horocycles de T^1S . Notons la $\hat{\mu}$. Elle s'écrit $d\hat{\mu}(\xi, t) = e^{\delta_\Gamma t} d\nu_o(\xi) dt$. Cette mesure donne lieu à une unique mesure Γ_0 -invariante ergodique, de support l'image $\mathcal{C}(\Gamma_0)$ de $\Lambda_\Gamma \times \mathbb{R}$, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Via l'application Φ , cette mesure s'écrit en coordonnées polaires $d\bar{\mu}(r, \theta) = 2r^{2\delta_\Gamma - 1} dr d\bar{\nu}_o(\theta)$, où $\bar{\nu}_o$ est l'unique relevé symétrique et de masse 1 à S^1 de la mesure image de ν_o sur S^1 / \pm .

Lorsque Γ est un réseau, on a $\delta_\Gamma = 1$, et les conventions de normalisation donnent que $\pi\bar{\mu}$ est la mesure de Lebesgue usuelle $rdrd\theta$ sur \mathbb{R}^2 , et $2\pi\bar{\nu}_o$ est la mesure angulaire standard sur S^1 . La mesure de Liouville sur T^1S , qui correspond à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dans cette dualité, coïncide elle avec $\pi^2 m^{ps} = \pi m^{BR}$.

4.2 Distribution des orbites d'un groupe de type fini sur \mathbb{R}^2

Pour énoncer nos résultats, nous avons besoin de la fonction τ définie sur l'ensemble non-errant \mathcal{E} du flot horocyclique par

$$\tau(u) = \mu_H^{ps} \left((h^s u)_{|s| \leq 1} \right),$$

où μ_H^{ps} est la mesure induite par la mesure de Patterson-Sullivan sur les horocycles, de support plein sur l'ensemble $\{v \in (h^s u)_{s \in \mathbb{R}}, v^- \in \Lambda_\Gamma\}$. La mesure μ_H^{ps} n'ayant pas d'atomes, τ est une fonction continue sur \mathcal{E} , nulle en dehors du voisinage $\{v \in \mathcal{E}, \exists s \in [-1, 1], h^s v \in \Omega\}$ de Ω dans \mathcal{E} .

Les propriétés de contraction/dilatation de μ_H^{ps} par le flot géodésique donnent pour tout $u \in T^1S$ et $t > 0$ la relation

$$t^{\delta_\Gamma} \tau(g^{\log t} u) = \mu_{H^-}((h^s u)_{|s| \leq t}). \quad (4.2.1)$$

Lorsque Γ est convexe-cocompact, Ω est compact, et donc τ est bornée sur \mathcal{E} car nulle en dehors du compact $\{v \in \mathcal{E}, \exists s \in [-1, 1], h^s v \in \Omega\}$. Lorsque Γ est géométriquement fini, si K_0 est la partie compacte de $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, d la distance hyperbolique sur \mathbb{H} , et $\pi : T^1S \rightarrow S$ la projection canonique, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.2 ([13]) *Soit S une surface hyperbolique non élémentaire géométriquement finie. Il existe une constante $C > 1$ telle que pour tout $u \in \Omega$, on ait*

$$\tau(u) = C^{\pm 1} e^{(1-\delta_\Gamma)d(\pi(u), K_0)}.$$

Notons que si Γ est un réseau, cette proposition dit que τ est bornée. Mais dans ce cas, on sait même que τ est constante, égale à $2/\pi$, car alors $d\mu_H^{ps} = ds/\pi$ n'est alors rien d'autre que le paramétrage usuel ds du flot horocyclique, à normalisation près.

Cette proposition se démontre en utilisant d'abord la formule (4.2.1), l'expression $d\mu_H^{ps}(v) = e^{-\delta_\Gamma \beta_{v^-, (\pi(v), o)} } d\nu_o(v^-)$, puis un énoncé de type « lemme de l'ombre » très précis, obtenu dans [4] pour toutes les variétés géométriquement finies de courbure négative pincée, et de dimension quelconque.

4.2.1 Résultats

Dans le cas convexe-cocompact, notre premier résultat est le suivant.

Théorème 4.3 ([13]) *Soit $\Gamma_0 < SL(2, \mathbb{R})$ un groupe discret convexe-cocompact non élémentaire, sans élément de torsion autre que $-Id$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\mathbf{u} \in \mathcal{C}(\Gamma_0)$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continue à support compact, on ait, lorsque $T \rightarrow +\infty$,*

$$\frac{1}{T^{\delta_\Gamma}} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u}) = C^{\pm 1} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^{\delta_\Gamma} |\mathbf{u}|^{\delta_\Gamma}} d\bar{\mu}(\mathbf{v}).$$

Autrement dit, on dispose d'un résultat asymptotique, à une constante $C^{\pm 1}$ près. Cette constante n'est pas là du fait d'un manque d'analyse approfondie de la question. En effet, nous démontrons qu'il n'y a pas convergence du terme de gauche ci-dessus vers le terme de droite, et ce, même si on changeait la normalisation en T^{δ_Γ} pour une autre normalisation. Plus précisément, on a

Théorème 4.4 ([13]) *Soit $\Gamma_0 < SL(2, \mathbb{R})$ un groupe discret géométriquement fini non élémentaire, sans élément de torsion autre que $-Id$. Il existe $f, g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continues à support compact, avec $\int_{\mathbb{R}^2} f d\bar{\mu} > 0$, $\int_{\mathbb{R}^2} g d\bar{\mu} > 0$, et telles que pour $\bar{\mu}$ -presque tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, le quotient*

$$\frac{\sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u})}{\sum_{\gamma \in \Gamma_T} g(\gamma \mathbf{u})}$$

n'a pas de limite quand $T \rightarrow +\infty$.

En réalité, le défaut de convergence des « moyennes » du théorème 4.3 ci-dessus est essentiellement dû à la nature fractale de l'ensemble limite Λ_Γ , qui crée des oscillations dans les quantités ci-dessus. Cependant, on peut régulariser la situation en moyennisant ces oscillations. On obtient alors le résultat suivant.

Théorème 4.5 ([13]) *Soit $\Gamma_0 < SL(2, \mathbb{R})$ un groupe discret non élémentaire, sans élément de torsion autre que $-Id$, qui est soit convexe-cocompact, soit géométriquement fini avec un exposant critique $\delta_\Gamma > 2/3$. Soit Γ l'image de Γ_0 dans $PSL(2, \mathbb{R})$ et $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$. Alors, pour $\bar{\mu}$ -presque tout $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, et toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ continue à support compact, on a*

$$\frac{1}{\log S} \int_1^S \frac{1}{T^{\delta_\Gamma}} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u}) \frac{dT}{T} \rightarrow \frac{2 \int_{T^1 S} \tau \, dm^{ps}}{(m^{ps}(T^1 S))^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\mathbf{v})}{|\mathbf{v}|^{\delta_\Gamma} |\mathbf{u}|^{\delta_\Gamma}} d\bar{\mu}(\mathbf{v}) \quad \text{quand } S \rightarrow +\infty$$

Ce type de convergence est appelé *Log-Cesàro convergence*. Il provient de la relation $g^t \circ h^s = h^{se^{-t}} \circ g^t$, et d'une moyennisation au sens de Cesàro classique de quantités dépendant de $\log T$, via un changement de variables. Remarquons que dans [L01], Ledrappier obtient également une Log-Cesàro convergence, dans la situation où Γ est le revêtement abélien d'un groupe cocompact. Dans ce cadre, les oscillations ne sont pas dues à la nature fractale de l'ensemble limite, mais sans doute plutôt à la présence de nombreuses mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique.

Soulignons l'hypothèse $\delta_\Gamma > 2/3$, qui n'était à notre connaissance pas apparue jusqu'ici dans la littérature. Elle n'a rien à voir avec l'hypothèse $\delta_\Gamma > 1/2$, elle très fréquente, qui apparaît dès qu'une méthode utilisant l'analyse harmonique est utilisée. Lorsque Γ n'est pas convexe-cocompact, mais géométriquement fini, l'hypothèse $\delta_\Gamma > 2/3$ est exactement celle dont on a besoin pour assurer que τ est intégrable pour m^{ps} , et donc donner sens au terme de droite. Nous montrons ce résultat en utilisant l'expression donnée par la proposition 4.2, puis en suivant littéralement une méthode due originellement à Dal'bo-Otal-Peigné [D-O-P00] pour montrer la finitude de la mesure m^{ps} .

Il est également possible de considérer des normes différentes sur $SL(2, \mathbb{R})$; on doit alors changer légèrement le dénominateur $|\mathbf{v}|^{\delta_\Gamma} |\mathbf{u}|^{\delta_\Gamma}$ dans la limite obtenue. Mais ceci se fait en suivant les mêmes idées de démonstration, et nous renvoyons à [13] pour les détails.

Observons une limite des résultats ci-dessus. Typiquement, si $\gamma \in \Gamma_T$ vérifie $\|\gamma\| \simeq T$, alors $\gamma \mathbf{u}$ va avoir une norme $|\gamma \mathbf{u}|$ également de l'ordre de T . Ainsi, si f est une fonction à support compact, donc borné, un élément typique $\gamma \mathbf{u}$ de l'orbite de \mathbf{u} par Γ ne sera pas dans le support de f , et n'interviendra donc pas dans les énoncés ci-dessus. D'ailleurs, ces théorèmes nous disent que le nombre d'éléments $\gamma \mathbf{u}$ de $\Gamma_T \cdot \mathbf{u}$ qui tombent dans le support de f est de l'ordre de T^{δ_Γ} , alors qu'il est possible de montrer que Γ_T a un cardinal équivalent, à une constante près, à $T^{2\delta_\Gamma}$. Dans [13], nous étudions aussi, pour f continue sur \mathbb{R}^2 , des moyennes du type

$$\frac{1}{T^{2\delta_\Gamma}} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} f\left(\frac{\gamma \mathbf{u}}{T}\right),$$

renormalisées pour « voir » l'essentiel de l'orbite $\Gamma_T \cdot \mathbf{u}$, et montrons qu'elles convergent (sans moyenne de Cesàro) vers l'intégrale de f pour une mesure absolument continue par rapport à $\bar{\mu}$. Nous renvoyons à [13] pour l'énoncé précis, qui nécessiterait l'introduction de trop de notations.

4.3 Heuristique de la preuve

La méthode est identique à celle de [L99]. La nouveauté principale de notre résultat réside dans le théorème 2.11 et son utilisation ci-dessous pour conclure. La trame de preuve présentée ci-dessous doit à quasiment toutes les étapes être comprise à quelques ε près, qui tendent vers 0 à la fin.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact, et soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On cherche à comprendre la quantité $\sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u})$, où $\Gamma_T = \{\gamma \in \Gamma_0, \|\gamma\| \leq T\}$, pour $\|\cdot\|$ la norme l^p sur \mathbb{R}^4 .

• Via la section Ψ , on relève f en une fonction continue à support compact $\tilde{f} : T^1\mathbb{H} = PSL(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, de la manière suivante. Fixons une fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue à support compact dans $[-1, 1]$, telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi(s) ds = 1$. Définissons alors $\tilde{f}(g) = f(g\mathbf{u}_0)\phi(c_{\mathbf{u}_0}(g))$. La fonction de « lissage » ϕ n'a pas grand rôle dans ce qui suit, si ce n'est qu'elle est indispensable pour assurer que \tilde{f} soit continue à support compact. Ensuite, sur T^1S , on définit $\tilde{f}(v) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{f}(\gamma \tilde{v})$, où \tilde{v} est un relevé quelconque de v à $T^1\mathbb{H}$. Et on vérifie le fait crucial suivant :

$$\int_{T^1S} f dm^{BR} = \int_{T^1\mathbb{H}} \tilde{f} d\tilde{m}^{BR} = \int_{\mathcal{H}} f \circ \Phi d\hat{\mu} = \int_{\mathbb{R}^2} f d\bar{\mu}.$$

• La relation $\Psi(\gamma \mathbf{u})n_{c_{\mathbf{u}}(\gamma)} = \gamma \Psi(\mathbf{u})$ et la construction ci-dessus permettent d'obtenir sur $T^1\mathbb{H}$ la relation $f(\gamma \mathbf{u}) = \int_{-c(\gamma, \mathbf{u})-1}^{-c(\gamma, \mathbf{u})+1} \tilde{f} \circ h^s(\gamma \Psi(\mathbf{u})) ds$.

• On a vu plus haut qu'il était possible de relier la taille du cocycle $c_{\mathbf{u}}(\gamma)$ à celles de \mathbf{u} , $\gamma \mathbf{u}$ et γ . On en déduit que si $\gamma \in \Gamma_T$, alors $\|\gamma\| \leq T$, d'où

$$|c_{\mathbf{u}}(\gamma)| \simeq \frac{\|\gamma\|}{|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|} \leq \frac{T}{|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|}.$$

On en déduit que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u}) \simeq 2 \int_{-T/(|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|)}^{T/(|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|)} \tilde{f} \circ h^s(\mathbf{u}) ds.$$

Le facteur 2 provient de la différence entre Γ et Γ_0 .

• C'est le moment où on souhaite pouvoir utiliser un résultat d'équidistribution des horocycles. D'abord, on choisit f à support dans un anneau très fin, de rayon $\simeq r$, de sorte que $|\gamma \mathbf{u}| \simeq r$ si $\gamma \mathbf{u}$ est dans le support de f . Le théorème 2.11 donne alors l'équivalent suivant du terme de droite

$$\int_{-T/(|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|)}^{T/(|\mathbf{u}||\gamma \mathbf{u}|)} \tilde{f} \circ h^s(\mathbf{u}) ds \sim \mu_H^{ps} \left((h^s \mathbf{u})_{|s| \leq \frac{T}{|\mathbf{u}|r}} \right) \frac{\int \tilde{f} dm^{BR}}{m^{ps}(T^1S)}.$$

• Il reste à comprendre l'équivalent obtenu. On sait que $\int_{T^1 S} \bar{f} dm^{BR} = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{v}) d\bar{\mu}(\mathbf{v})$, que $|\mathbf{v}| \simeq r$ sur le support de f et que $\mu_H^{ps} \left((h^s \mathbf{u})_{|s| \leq \frac{T}{|\mathbf{u}|r}} \right) = \left(\frac{T}{|\mathbf{u}|r} \right)^{\delta_\Gamma} \tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r} \mathbf{u})$. On en déduit l'approximation

$$\begin{aligned} \frac{1}{T^{\delta_\Gamma}} \sum_{\gamma \in \Gamma_T} f(\gamma \mathbf{u}) &\simeq \frac{1}{|\mathbf{u}|^{\delta_\Gamma} r^{\delta_\Gamma}} \frac{2\tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r} \mathbf{u})}{m^{ps}(T^1 S)} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{v}) d\bar{\mu}(\mathbf{v}) \\ &\simeq \frac{2\tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r} \mathbf{u})}{m^{ps}(T^1 S)} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\mathbf{v})}{|\mathbf{u}|^{\delta_\Gamma} |\mathbf{v}|^{\delta_\Gamma}} d\bar{\mu}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

• Le théorème 4.3 vient alors du fait que τ est bornée sur Ω , lorsque Γ est convexe-cocompact.

• Pour ôter la restriction imposée sur le support de f , on introduit des ε , et on découpe f en morceaux (à support dans des anneaux de largeur epsilonesque).

• Lorsque τ est m^{ps} -intégrable, i.e. si Γ est convexe-cocompact ou géométriquement fini avec $\delta_\Gamma > 2/3$, on peut lui appliquer le théorème ergodique de Birkhoff. On obtient $\frac{1}{U} \int_0^U \tau(g^t \mathbf{u}) dt \rightarrow \int \tau dm^{ps}$. Le changement de variables $t = \log T$ donne la log-Cesàro convergence du théorème 4.5.

• Le terme en $\log r$ dans $\tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r} \mathbf{u})$ (où r est le rayon de l'anneau très fin qui supporte f) et la définition de τ en termes de la mesure μ_H^{ps} , dont le support est fractal, permettent de construire des fonctions f et g à supports dans des anneaux bien distincts de rayons respectifs $r(f)$ et $r(g)$ de sorte que le quotient

$$\frac{\tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r(f)} \mathbf{u})}{\tau(g^{\log T - \log |\mathbf{u}| - \log r(g)} \mathbf{u})}$$

ne converge pas quand $T \rightarrow +\infty$, démontrant ainsi le théorème 4.4.

Chapitre 5

Mesures génériques pour le flot géodésique

Les travaux [7] et [11] décrits ici ont été effectués en collaboration avec Yves Coudène. Nous continuons à travailler sur ces questions, et avons obtenu certains résultats supplémentaires, et améliorations, que je note ici sous la référence [15].

Etant donnée une variété M à courbure négative, non compacte, mais non élémentaire (i.e. avec au moins trois orbites périodiques distinctes pour le flot géodésique), nous nous sommes posé la question de savoir quelles étaient les mesures invariantes pertinentes pour étudier la dynamique du flot géodésique. En particulier, existe-t-il de bonnes mesures de probabilité (donc finies), invariantes, ergodiques, et de support plein, permettant d'avoir une image raisonnable de la dynamique du flot géodésique.

Quand nous parlons de dynamique du flot géodésique et de mesures de support plein, il faut restreindre l'étude à l'ensemble *non-errant* du flot géodésique $\Omega \subset T^1M$, hors duquel la dynamique est triviale (car errante). Rappelons qu'un vecteur v est *non errant* si pour tout voisinage V de v , et tout $T > 0$, il existe $t \geq T$ t.q. $g^tV \cap V \neq \emptyset$.

Bien sûr, on dispose d'une infinité d'orbites périodiques pour le flot géodésique, et donc d'une infinité de mesures de probabilité invariantes ergodiques portées par ces orbites. Cela dit, ces mesures ne sont pas très intéressantes d'un point de vue dynamique, car leur support est très petit, et que de leur point de vue, le flot géodésique revient à une translation le long de l'orbite.

La mesure de Liouville, au contraire, est toujours, par définition, une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur T^1M . Elle est donc de support plein. En revanche, dès que la variété n'est pas de volume fini, elle est tautologiquement infinie. De plus, dès que l'ensemble non errant du flot est strictement inclus dans T^1M , elle n'est pas ergodique. Nous avons démontré le résultat suivant dans [7].

Théorème 5.1 ([7]) *Soit M une variété riemannienne non élémentaire à courbure strictement négative. Soit $\Omega \subset T^1M$ l'ensemble non-errant du flot géodésique. L'ensemble des mesures de probabilité invariantes et ergodiques pour le flot géodésique, et de support plein sur Ω est un G_δ -dense de l'ensemble de toutes les probabilités invariantes par le flot géodésique sur Ω .*

Commençons par quelques remarques.

1. Dans le cas d'un décalage sur un alphabet fini, ce résultat est dû à Oxtoby [Ox63]. Il a ensuite été généralisé par Sigmund [Si72] dans le cas de difféomorphismes Axiom A sur des variétés compactes.
2. On peut également démontrer que les mesures de probabilité d'entropie nulle, et les mesures qui ne sont pas fortement mélangeantes contiennent un ensemble générique au sens ci-dessus (théorèmes 5.3 et 5.6, voir aussi [ABC10]). Sigmund obtient la genericité des mesures faiblement mélangeantes, via un argument de codage. Cette question est complètement ouverte dans notre cadre. (Le fait que ces mesures forment un G_δ est facile, mais c'est la densité qui pose problème).
3. Notre méthode est adaptée à la courbure variable et à l'absence totale d'hypothèse de compacité. Elle nous a donc permis d'obtenir des résultats également en courbure négative ou nulle, sur les variétés dites de rang un. Ces résultats sont présentés au paragraphe 5.4.

Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons d'une part les outils fondamentaux de la preuve, dont l'intérêt est sans doute aussi important que le résultat, du fait de la simplicité à les comprendre et les manipuler. Ensuite, nous donnons une idée rapide de la démonstration du théorème 5.1 ci-dessus, ainsi que celles des théorèmes 5.3 et 5.6 et nous finissons par une discussion (paragraphe 5.4) des résultats que nous avons obtenus sur les variétés à courbure négative ou nulle dites de rang un.

5.1 Spécification, produit local, lemme de fermeture, transitivité

Oxtoby et Sigmund, pour démontrer leurs résultats dans un cadre compact, utilisent la propriété dite de *spécification* satisfaite par exemple par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne compacte à courbure négative. Pour en illustrer la difficulté, énonçons-la.

On dit que le système dynamique (X, T) vérifie la *propriété de spécification* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $M = M_\varepsilon$, tel que pour toute collection finie de bouts d'orbites $(T^k(x_i))_{0 \leq k \leq K_i}$, on peut pister cette collection à ε près par une orbite périodique, en mettant un temps au plus M à passer d'une orbite à une autre. Autrement dit, il existe un point périodique p , et une union finie d'intervalles $[a_i, a_i + K_i]$ de \mathbb{Z} , tels que $a_{i+1} \geq a_i + K_i + M$, et $(T^k p)_{a_i \leq k \leq a_i + K_i}$ piste à ε près $(T^k x_i)_{0 \leq k \leq K_i}$. Cette définition se généralise aisément dans le cas des flots.

Pour un difféomorphisme hyperbolique sur un espace compact, cette propriété est équivalente au mélange topologique (voir [Ka-H95], thm 18.3.9). Pour un difféomorphisme quelconque, il est facile de vérifier qu'elle implique le mélange topologique. Pour un flot, cette propriété ne peut entraîner que la transitivité topologique définie plus bas.

Dans l'exemple du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété à courbure négative, lorsque la variété n'est pas bornée, il est aisé de constater que cette propriété ne peut pas être vérifiée, pour peu qu'on essaie de pister des bouts

d'orbites de plus en plus éloignés les uns des autres.

Nous introduisons des propriétés bien plus faibles, valides sans aucune hypothèse de compacité. Comme nos exemples favoris sont des flots, ces propriétés seront énoncées dans le cas d'un flot $(\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agissant sur un espace métrique (X, d) .

Le flot est dit *topologiquement transitif* si pour tous ouverts U, V de X , et pour tout $T \in \mathbb{R}$, il existe $t \geq T$ t.q. $\phi^t U \cap V \neq \emptyset$. La transitivité topologique est plus faible que le *mélange topologique*, qui dit qu'il existe $T \in \mathbb{R}$, t.q. pour tout $t \geq T$, $\phi^t U \cap V \neq \emptyset$. Et il existe bien entendu des exemples de flots topologiquement transitifs et non topologiquement mélangeants. Mentionnons par exemple les suspensions de hauteur constante au-dessus d'un difféomorphisme topologiquement mélangeant, ou les flots linéaires dans une direction irrationnelle sur les tores.

Rappelons que la *variété fortement stable* de $v \in X$ est définie par

$$W^{ss}(v) = \{w \in X, d(\phi^t v, \phi^t w) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}.$$

La variété fortement stable locale $W_\varepsilon^{ss}(v)$ est simplement l'intersection $W^{ss}(v) \cap B(v, \varepsilon)$. La variété fortement instable (locale) est définie de manière analogue, en faisant tendre t vers $-\infty$.

Le flot satisfait la propriété de *produit local* si tout $u \in X$ admet un voisinage U qui satisfait la propriété suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ t.q. pour tous $v, w \in U$, avec $d(v, w) \leq \delta$, il existe un point $\langle v, w \rangle \in X$, et un réel $|t| \leq \varepsilon$ t.q. $\langle v, w \rangle \in W_\varepsilon^{su}(\phi^t v) \cap W_\varepsilon^{ss}(w)$. Autrement dit, on peut « recoller » le passé de v avec le futur de w , à un léger décalage temporel t près.

Le flot satisfait le *lemme de fermeture* si pour tout $u \in X$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de u , un $\delta > 0$ et $t_0 > 0$ t.q. pour tout point $v \in U$ vérifiant $d(\phi^t v, v) \leq \delta$ pour un certain $t \geq t_0$, il existe un point périodique $p \in X$, de période $l > 0$ tq $|l - t| \leq \varepsilon$, satisfaisant $d(\phi^s p, \phi^s v) \leq \varepsilon$ pour tout $0 \leq s \leq \min(t, l)$. Cette propriété a été démontrée par Anosov [An67] dans une version uniforme, pour les systèmes maintenant appelés Anosov, et en particulier pour les flots géodésiques sur les variétés compactes à courbure strictement négative.

Observons que les propriétés de produit local et de fermeture énoncées ci-dessus, bien connues pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété compacte à courbure négative, sont proposées ici dans des formulations non uniformes, dépendant du voisinage U d'un point $u \in X$ sur lequel on travaille. Ceci permet de les vérifier dans un cadre plus général, sans pour autant enlever de leur utilité.

Ces trois propriétés sont vérifiées pour le flot géodésique $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$ agissant sur son ensemble non-errant Ω muni de la distance riemannienne standard sur $T^1 M$.

En effet, le flot géodésique est topologiquement transitif du fait de l'existence d'une orbite dense dans Ω [Eb72].

Le produit local se voit très facilement de la manière suivante. En effet, dans les coordonnées de Hopf, on a $T^1 \widetilde{M} \simeq (\partial \widetilde{M} \times \partial \widetilde{M}) \setminus \text{diagonale} \times \mathbb{R}$, $T^1 M \simeq$

$\Gamma \setminus (\partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \text{diagonale} \times \mathbb{R})$, et $\Omega \simeq \Gamma \setminus (\Lambda_\Gamma \times \Lambda_\Gamma \setminus \text{diagonale} \times \mathbb{R})$, où $\Lambda_\Gamma \subset \partial\widetilde{M}$ est l'ensemble limite de Γ dans le bord à l'infini $\partial\widetilde{M}$ de \widetilde{M} . Soient maintenant deux vecteurs $v, w \in \Omega$ très proches l'un de l'autre. Relevons-les isométriquement en $\tilde{v} = (v^-, v^+, s)$ et $\tilde{w} = (w^-, w^+, t)$ aussi proches l'un de l'autre. Le vecteur $\langle \tilde{v}, \tilde{w} \rangle$ est alors le vecteur de coordonnées (v^-, w^+, t) .

Quant au lemme de fermeture, il peut se démontrer schématiquement comme suit. Supposons en raisonnant par l'absurde qu'il n'est pas satisfait au voisinage de u . Il existe alors une suite $u_n \rightarrow u$ et une suite $t_n \rightarrow +\infty$, t.q. $d(g^{t_n}u_n, u_n) \rightarrow 0$. En relevant les vecteurs u, u_n isométriquement dans un petit voisinage de \tilde{u} , on trouve des isométries hyperboliques γ_n envoyant \tilde{u}_n sur $g^{t_n}\tilde{u}_n$. Leurs axes doivent donc se projeter en des axes d'orbites périodiques de période proche de t_n , d'où une contradiction qui permet de démontrer le lemme de fermeture.

Remarquons avant de passer aux idées de la démonstration du théorème 5.1 que les trois propriétés ci-dessus permettent de redémontrer la spécification, dans le cas du flot géodésique agissant sur le fibré unitaire tangent d'une variété compacte à courbure négative.

5.2 Propriétés génériques des mesures invariantes en courbure strictement négative

Donnons maintenant une idée des arguments de la preuve du théorème 5.1. Mentionnons le fait que dans [7], nous démontrons un énoncé abstrait, valide pour tout système vérifiant nos trois propriétés de transitivité, produit local et fermeture. Le théorème 5.1 était néanmoins la motivation initiale de notre travail.

Nous utiliserons le terme de « générique » au sens de Baire : un ensemble est générique s'il est intersection dénombrable d'ouverts denses.

Nous souhaitons montrer que dans l'ensemble $\mathcal{M}^1(\Omega)$ des probabilités invariantes par (g^t) sur Ω , d'une part les mesures de support plein sont génériques, ce qui est facile, et d'autre part les mesures ergodiques sont génériques, ce qui est moins standard.

En considérant une base dénombrable $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts de la topologie de Ω , et le fermé $F_n = \{\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), \mu(U_n) = 0\}$, il est aisé de voir que les mesures de support non plein forment une union dénombrable de fermés. On montre ensuite qu'ils sont d'intérieur vide en utilisant la densité des orbites périodiques dans Ω , laquelle densité est par exemple une conséquence du lemme de fermeture.

Passons maintenant à la généricité des mesures ergodiques. Il est très facile d'écrire l'ensemble des mesures ergodiques comme une intersection dénombrable d'ouverts, et ce, sans la moindre hypothèse sur le système dynamique. L'enjeu est donc de montrer qu'elles sont denses dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$.

Les mesures ergodiques étant les points extrémaux du convexe $\mathcal{M}^1(\Omega)$, cela revient à dire que l'ensemble des points extrémaux d'un convexe est dense dans ce convexe, ce qui ne peut bien sûr pas être un fait tout à fait général !

Ceci se fait en deux temps. D'abord, on montre que les mesures portées par les

orbites périodiques (que nous appellerons désormais « mesures périodiques ») sont denses dans les mesures ergodiques. Puis nous montrons que les mesures périodiques sont denses dans leur enveloppe convexe, démontrant ainsi la proposition suivante.

Proposition 5.2 ([7]) *Soit M une variété riemannienne non élémentaire à courbure strictement négative. Alors l'ensemble des mesures périodiques est dense dans l'ensemble des probabilités invariantes $\mathcal{M}^1(\Omega)$.*

Insistons sur le fait que cette propriété est en réalité valide pour un système dynamique abstrait, sous réserve que les trois propriétés de transitivité topologique, produit local et lemme de fermeture soient vérifiées.

Cette proposition implique bien entendu la densité des mesures ergodiques dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$, et donc le résultat voulu.

La première étape, de densité des mesures périodiques dans les mesures ergodiques, se démontre ainsi : étant donnée une mesure ergodique μ , le théorème ergodique de Birkhoff et le théorème de récurrence de Poincaré nous fournissent un vecteur v à la fois récurrent et générique pour μ , au sens où les moyennes de Birkhoff sur son orbite convergent vers μ . Le lemme de fermeture permet alors de trouver, pour des temps t arbitrairement longs, une orbite périodique pistant l'orbite de v pendant le temps t . Par construction de v , la mesure périodique associée est très proche des moyennes de Birkhoff sur l'orbite de v , et donc de μ .

La seconde étape est cruciale. On souhaite montrer la densité des mesures périodiques dans leur enveloppe convexe, et donc dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$, d'après ce qui précède. On fixe une combinaison convexe finie de mesures périodiques, à coefficients rationnels. À l'aide des propriétés de transitivité et de produit local, on construit une orbite négativement asymptotique à la première orbite périodique, puis qui spirale alternativement autour de chacune de ces orbites périodiques pendant un nombre de tours arbitrairement grand, et revient enfin spiraler autour de la première orbite périodique. Le lemme de fermeture permet de fermer cette orbite. En jouant sur le nombre de tours effectués autour de chacune des orbites périodiques de la combinaison convexe, on parvient à montrer que la mesure portée par l'orbite périodique obtenue est arbitrairement proche de la combinaison convexe initiale.

5.3 Entropie, mélange

Nous montrons ici que l'ensemble des mesures d'entropie nulle, et l'ensemble des mesures non fortement mélangeantes contiennent un ensemble générique. Ces résultats sont issus de [15]. Nous les présentons, car ils illustrent l'utilisation systématique de la proposition 5.2, et sont des généralisations faciles de résultats classiques. Comme [15] n'est pas accessible, les preuves complètes sont données.

Théorème 5.3 ([15]) *Soit M une variété riemannienne non élémentaire à courbure strictement négative. L'ensemble des probabilités de $\mathcal{M}^1(\Omega)$ d'entropie nulle est un G_δ dense de $\mathcal{M}^1(\Omega)$.*

La démonstration repose sur celle de Sigmund [Si72] dans le cas de flots Axiome A sur des variétés compactes, ainsi que des résultats de Abdenur, Bonatti, Crovisier

[ABC10] qui considèrent des difféomorphismes non uniformément hyperboliques sur des variétés compactes.

Avant de démontrer le théorème, rappelons quelques définitions.

Définition 5.4 Soit $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_K\}$ une partition borélienne finie de Ω . L'entropie de \mathcal{P} est définie par $H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$. Notons $\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{P}$ la partition en ensembles du type $P_{i_1} \cap T^{-1} P_{i_2} \cap \dots \cap T^{-n+1} P_{i_n}$. L'entropie métrique de $T = g^1$ par rapport à la partition \mathcal{P} est la limite

$$h_\mu(g^1, \mathcal{P}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i} \mathcal{P}). \quad (5.3.1)$$

L'entropie métrique de $T = g^1$ est le supremum $h_\mu(g^1) = \sup\{h_\mu(g^1, \mathcal{P}), \mathcal{P} \text{ partition finie}\}$.

Le résultat ci-dessous est classique [W82].

Proposition 5.5 Soit $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de partitions boréliennes finies de Ω t.q. $\bigvee_{k=0}^\infty \mathcal{P}_k$ engendre la tribu borélienne de Ω . Alors on a

$$h_\mu(g^1) = \sup_{k \in \mathbb{N}} h_\mu(g^1, \mathcal{P}_k).$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème 5.3.

Démonstration: Comme les mesures périodiques sont denses dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$, et d'entropie nulle, il suffit ici de démontrer que l'ensemble des mesures d'entropie nulle est un G_δ . Notons $\mathcal{M}_{\frac{1}{2}}^1(\Omega)$ l'ensemble des mesures d'entropie nulle dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$.

Remarquons d'abord que si $B = B(x, r)$ est une petite boule, avec $r > 0$ plus petit que le rayon d'injectivité de M en x , une géodésique périodique coupe le bord ∂B en un nombre fini de points. Relevons B en $T^1 B$. Les mesures périodiques donnent toutes mesure 0 au bord de $T^1 B$.

Choisissons une famille dénombrable $B_i = B(x_i, r_i)$ de boules dont les centres sont denses dans Ω . Divisons chaque relevé $T^1 B_i$ en un nombre fini de « boules », et notons (\mathcal{B}_j) la famille dénombrable d'ensembles de $T^1 M$ obtenus. Toute sous famille finie de \mathcal{B}_j induit une partition finie de Ω en boréliens (les intersections finies des \mathcal{B}_j et de leurs complémentaires). Notons \mathcal{P}_k la partition induite par $(\mathcal{B}_j)_{0 \leq j \leq k}$. Si les \mathcal{B}_j sont bien choisis, la suite croissante $\bigvee_{k=0}^\infty \mathcal{P}_k$ engendre la tribu borélienne de Ω .

Soit μ_0 une mesure périodique sur Ω . Alors $\mu_0(\partial \mathcal{P}_k) = 0$ et $h_{\mu_0}(\mathcal{P}_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La limite (5.3.1) existe tout le temps, de sorte que nous pouvons la remplacer par une liminf. Comme $\mu_0(\partial \mathcal{P}_k) = 0$, si une suite $\mu_i \in \mathcal{M}^1(\Omega)$ converge faiblement vers μ_0 , elle vérifie alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, $H_{\mu_i}(\bigvee_{j=0}^n g^{-j} \mathcal{P}_k) \rightarrow H_{\mu_0}(\bigvee_{j=0}^n g^{-j} \mathcal{P}_k)$ quand $i \rightarrow \infty$. En particulier, l'ensemble

$$\left\{ \mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), H_\mu(\bigvee_{j=0}^n g^{-j} \mathcal{P}_k) < H_{\mu_0}(\bigvee_{j=-n}^n g^j \mathcal{P}_k) + \frac{1}{r} \right\},$$

pour $r \in \mathbb{Q}_{*+}$, est un ouvert. On en déduit que $\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^1(\Omega)$ est un G_δ de $\mathcal{M}^1(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\mathbb{Z}}^1(\Omega) &= \{\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), h_\mu(g^1) = 0 = h_{\mu_0}(g^1)\} \\
&= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), h_\mu(g^1, \mathcal{P}_k) = 0 = h_{\mu_0}(g^1, \mathcal{P}_k)\} \\
&= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{r=1}^{\infty} \{\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), 0 \leq h_\mu(g^1, \mathcal{P}_k) < \frac{1}{r} = h_{\mu_0}(g^1, \mathcal{P}_k) + \frac{1}{r}\} \\
&= \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \\
&\quad \{\mu \in \mathcal{M}^1(\Omega), \frac{1}{n+1} H_\mu(\bigvee_{j=0}^n g^{-j} \mathcal{P}_k) < \frac{1}{n+1} H_{\mu_0}(\bigvee_{j=0}^n g^{-j} \mathcal{P}_k) + \frac{1}{r}\}.
\end{aligned}$$

□

Le résultat précédent est un peu frustrant, puisqu'il nous dit que génériquement, les mesures invariantes sont d'entropie nulle. Cela dit, ce n'est pas très étonnant, compte tenu de la densité des mesures portées par les orbites périodiques dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$.

Passons maintenant au mélange. La question est de savoir si génériquement, une mesure est fortement mélangeante ou non. Avant tout, pour que cette question ait un sens, il faut nous assurer que le flot géodésique est topologiquement mélangeant. Ceci est connu en courbure constante, en dimension 2, ou en présence de cusps. Dans les autres cas, il est connu ([D00]) que ceci équivaut à la non-arithméticité du groupe engendré par les longueurs des géodésiques périodiques. Sous cette hypothèse, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 5.6 ([15]) *Soit M une variété riemannienne à courbure strictement négative, non élémentaire dont le spectre des longueurs est non arithmétique. Alors l'ensemble des mesures invariantes sur Ω qui ne sont pas fortement mélangeantes contient un G_δ -dense de probabilités invariantes de $\mathcal{M}^1(\Omega)$.*

Ce résultat est dû à K. R. Parthasarathy pour des systèmes dynamiques discrets [Pa61]. Nous écrivons ici la démonstration dans le cas des flots.

Démonstration: L'argument essentiel est une fois encore la densité des mesures portées par les orbites périodiques dans $\mathcal{M}^1(\Omega)$, qui ne sont clairement pas fortement mélangeantes.

Le seul point à vérifier est donc le fait que l'ensemble des mesures fortement mélangeantes est inclus dans une union dénombrable de fermés ne contenant pas de mesures périodiques.

Choisissons un ensemble dénombrable dense $\{x_i \in \Omega\}$, et soit \mathcal{A} la famille des boules fermées de rayons rationnels centrés en les x_i . Si une mesure μ est fortement mélangeante, alors pour tout fermé $F \subset \mathcal{A}$ t.q. $\mu(F) > 0$, on a $\mu(F \cap g^t F) \rightarrow \mu(F)^2$ quand $t \rightarrow \infty$.

Pour tout $F_1 \in \mathcal{A}$, soit $G_n = V_{\frac{1}{n}}(F_1)$ une suite décroissante de voisinages ouverts de F_1 d'intersection F_1 . L'ensemble des mesures fortement mélangeantes est inclus dans l'union (dont tous les indices n, ε, η, r sont rationnels, $t \in \mathbb{R}$ et F_1, F_2 sont disjoints)

$$\bigcup_{F_1, F_2 \in \mathcal{A}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{\varepsilon \in (0, 1/2)} \bigcup_{0 < \eta < 2\varepsilon^2/3} \bigcup_{r \in (0, 1)} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{t \geq m} A_{F_1, F_2, n, \varepsilon, \eta, r, m, t}$$

avec $A_{F_1, F_2, n, \varepsilon, \eta, r, m, t} = \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega) \mid \mu(F_1) \geq \varepsilon, \mu(F_2) \geq \varepsilon, \mu(G_n \cap g^t G_n) \leq r \leq \mu^2(F_1) + \eta\}$. Cet ensemble est fermé, car G_n est ouvert, et F_1, F_2 fermés. (Le deuxième fermé F_2 est disjoint de F_1 et est là uniquement pour garantir que F_1 n'est pas de mesure pleine). L'intersection $\cap_{t \geq m} A_{F_1, F_2, n, \varepsilon, \eta, r, m, t}$ est donc encore fermée. L'ensemble des mesures fortement mélangeantes est donc inclus dans une union dénombrable de fermés. Montrons pour finir que chacun de ces fermés $\cap_{t \geq m} A_{F_1, F_2, n, \varepsilon, \eta, r, m, t}$ est d'intérieur vide. Pour cela, montrons que leurs complémentaires contiennent toutes les orbites périodiques.

D'abord, si μ est une mesure périodique de période l , pour tout borélien $A \subset X$, et tout multiple jl de la période, on a $\mu(A \cap g^{jl} A) = \mu(A)$. En particulier, ces mesures ne sont évidemment pas mélangeantes. Soit μ_0 une mesure périodique de période $l > 0$, et $j \geq 1$ t.q. $jl \geq m$. Si $\mu_0(F_1) \geq \varepsilon$ and $\mu_0(F_2) \geq \varepsilon$, on a alors $\varepsilon \leq \mu_0(F_1) \leq 1 - \varepsilon$. Comme μ_0 est périodique, on a $\mu_0(G_n \cap g^{jl} G_n) = \mu_0(G_n)$. On en déduit que

$$\mu_0(G_n \cap g^{jl} G_n) - \mu_0(F_1)^2 = \mu_0(G_n) - \mu_0(F_1)^2 \geq \mu_0(F_1)(1 - \mu_0(F_1)) \geq \varepsilon(1 - \varepsilon) \geq \varepsilon^2 > \eta$$

de sorte que μ_0 n'appartient pas à $\cap_{t \geq m} A_{F_1, F_2, n, \varepsilon, \eta, r, m, t}$. C'est le résultat voulu. \square

5.4 Extension des résultats précédents aux variétés de courbure négative ou nulle

La robustesse des outils utilisés ci-dessus nous a permis d'aborder l'étude de certaines variétés à courbure négative ou nulle, les variétés dites de rang un.

Soit M une variété riemannienne dont toutes les courbures sectionnelles sont négatives ou nulles. Un vecteur $v \in TM$ est dit *de rang un* si la dimension de l'espace des champs de Jacobi parallèles le long de la géodésique qu'il définit est un. Intuitivement, infinitésimalement, il ne borde pas de « bande plate », i.e. de plongement isométrique de $[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$ dans M . L'exemple type de vecteur de rang un est un vecteur v tel que $g^t v$ est tangent à une zone de courbure strictement négative, pour au moins un $t \in \mathbb{R}$. L'exemple type de vecteur de rang supérieur est un vecteur v qui borde une bande plate de largeur strictement positive. Autrement dit, sur le revêtement universel \tilde{M} , la géodésique $(\pi(g^t \tilde{v}))_{t \in \mathbb{R}}$ est incluse dans une bande plate euclidienne $[0, \varepsilon] \times \mathbb{R}$. Il peut exister des vecteurs de rang supérieur qui ne bordent pas de vraie bande plate de largeur strictement positive.

Une *variété de rang un* est une variété qui admet au moins un vecteur de rang un. L'ensemble des vecteurs de rang un est un ouvert de $T^1 M$ [B95], invariant par le flot géodésique. C'est un ouvert dense lorsque M est compacte. ⁽¹⁾

Nous avons essayé d'étendre nos résultats sur les mesures génériques pour le flot géodésique aux variétés de rang un. Pour cela, il faut identifier un « bon ensemble » sur lequel il est raisonnable d'étudier le flot géodésique.

1. En effet, dans ce cas, tous les vecteurs de $T^1 M$ sont non-errants (condition appelée parfois « propriété de dualité »), ce qui implique (voir [B95] par exemple) que le flot géodésique est topologiquement transitif. Il existe donc une orbite dense, qui doit donc passer dans l'ouvert des vecteurs de rang un, et y rester puisque cet ouvert est invariant.

Ci-dessous, nous présentons d'abord quelques sous-ensembles de l'ensemble non-errant, invariants par le flot géodésique, qui peuvent paraître naturels pour étudier ce genre de propriétés. Ensuite, nous discutons de la validité des trois propriétés clé : transitivité, produit local, fermeture, sur ces différents sous-ensembles, pour aboutir à un analogue de la proposition 5.2 et du théorème 5.1. Puis nous présentons quelques exemples, qui sont des contre-exemples à des versions très générales de notre résultat.

5.4.1 Quelques sous-ensembles sur lesquels étudier la dynamique

Nous restreignons notre étude à l'ensemble non errant $\Omega \subset T^1M$ du flot géodésique, hors duquel il n'est pas raisonnable d'espérer démontrer quelque chose d'intéressant.

A priori (et ceci sera rediscuté plus loin) il n'est pas non plus raisonnable d'espérer que la dynamique sur les zones plates euclidiennes soit du même type que la dynamique du flot géodésique dans les zones à courbure strictement négative.

Notons \mathcal{R}_1 l'ensemble des vecteurs de rang un. Naïvement, le premier ensemble qu'on peut souhaiter étudier est l'ensemble $\Omega \cap \mathcal{R}_1$ des vecteurs non errants de rang un. Cela dit, certains vecteurs de rang un sont asymptotes à des bandes plates, sur lesquelles la dynamique est radicalement différente.

Nous introduisons donc l'ensemble, noté Ω_{hyp} , des vecteurs non-errants dont les variétés fortement stables et instables pour le flot géodésique ont la propriété suivante. Si \tilde{v} est un relevé de v à $T^1\tilde{M}$, et si $\tilde{w} \in T^1\tilde{M}$ est tel que la distance $d(g^t\tilde{v}, g^t\tilde{w})$ reste bornée pour tout $t \geq 0$, alors $\tilde{w} \in W^{ss}(\tilde{v})$, et de même lorsque $t \rightarrow -\infty$. Nous appellerons ici ces vecteurs *hyperboliques*, même si la terminologie n'est certainement pas idéale.

Remarquons qu'il n'y a aucune inclusion entre Ω_{hyp} et $\Omega \cap \mathcal{R}_1$. En effet, un vecteur de rang un qui spirale asymptotiquement autour d'une bande plate sera dans $\Omega \cap \mathcal{R}_1$ mais pas dans Ω_{hyp} . A l'inverse, il existe des vecteurs qui sont de rang deux (ou plus) au sens infinitésimal de la définition, mais qui appartiennent néanmoins à Ω_{hyp} . Par exemple, imaginons une surface de genre 2, dont la courbure est négative aux extrémités, et tend vers 0 au milieu, pour ne s'annuler que sur la géodésique périodique simple qui sépare la surface en deux tores à un trou identiques. Cette géodésique est à la fois de rang 2 et dans Ω_{hyp} . Pour travailler avec de bonnes propriétés d'hyperbolicité, nous avons travaillé dans [7] sur l'ensemble

$$\Omega_1 = \Omega \cap \mathcal{R}_1 \cap \Omega_{hyp}.$$

Nous avons déjà souligné que les plats euclidiens posent des problèmes. Nous utiliserons donc également l'ensemble Ω_{NF} des vecteurs $v \in \Omega$ qui ne bordent pas de plat euclidien de largeur strictement positive. Bien entendu, on a $\Omega_1 \subset \Omega_{NF}$. En réalité, les plats euclidiens les plus gênants sont ceux qui contiennent une orbite périodique. Nous noterons donc $\Omega_{NFP} \supset \Omega_{NF}$ l'ensemble des vecteurs non errants qui ne bordent pas de plat euclidien de largeur strictement positive qui contient une orbite périodique. On a alors

$$\Omega_1 \subset \Omega_{hyp} \subset \Omega_{NF} \subset \Omega_{NFP} \subset \Omega.$$

Remarque 5.7 Remarquons que tous ces ensembles invariants $\Omega_1 \subset \Omega_{hyp} \subset \Omega_{NF} \subset \Omega_{NFP}$ ont les mêmes orbites périodiques, que nous appellerons orbites périodiques

hyperboliques. Nous supposons dans tout ce qui suit qu'il existe au moins trois orbites périodiques hyperboliques primitives distinctes, et nous appellerons *variété de rang un non élémentaire* une variété de rang un admettant au moins trois orbites périodiques *hyperboliques* primitives non homotopes. ⁽²⁾

Ces orbites périodiques hyperboliques sont denses dans tout ensemble sur lequel le lemme de fermeture est vérifié, sur Ω_1 en particulier, ou bien sur Ω_{NF} lorsque ce dernier ensemble est ouvert dans Ω (voir ci-dessous).

5.4.2 Mesures génériques sur Ω_1 et Ω_{NF}

Dans [7], nous nous sommes intéressés au flot géodésique restreint à Ω_1 , et dans [15] à Ω_{NF} , lorsque Ω_{NF} est ouvert dans Ω , ce qui est le cas dans les premiers exemples qui viennent à l'esprit. Nous allons rappeler les propriétés clé utilisées, et montrer comment nos résultats de [7] s'étendent dans [15] à Ω_{NF} .

Proposition 5.8 ([7,15]) *Soit M une variété de rang un non élémentaire. Alors la restriction du flot géodésique à Ω_1 vérifie les propriétés de produit local, de fermeture, et de transitivité topologique.*

Si Ω_{NF} est ouvert dans Ω , alors ces propriétés sont également satisfaites sur Ω_{NF} .

Corollaire 5.9 ([7,15]) *Soit M une variété de rang un non élémentaire. Les mesures portées par les orbites périodiques hyperboliques sont denses dans l'ensemble des mesures invariantes sur Ω_1 .*

Si Ω_{NF} est ouvert dans Ω , alors elles sont denses également dans les mesures invariantes sur Ω_{NF} .

Ces résultats nous permettent dans [7,15], comme en courbure négative, de déduire le théorème suivant.

Théorème 5.10 ([7,15]) *Soit M une variété de rang un non élémentaire. Alors les mesures invariantes ergodiques de support plein sont génériques dans l'ensemble $\mathcal{M}^1(\Omega_1)$ des mesures de probabilité invariantes sur Ω_1 .*

Si Ω_{NF} est ouvert dans Ω , le résultat est encore vrai en remplaçant Ω_1 par Ω_{NF} .

Pour démontrer le corollaire et le théorème, la stratégie est identique à celle présentée au paragraphe 5.2. Nous ne la rappelons pas, le seul résultat nouveau à démontrer ici est la validité de la proposition 5.8 sur Ω_1 ou Ω_{NF} . Nous proposons donc ci-dessous des démonstrations des trois propriétés clé de fermeture, produit local et transitivité sous l'hypothèse que Ω_{NF} est ouvert dans Ω , et nous renvoyons le lecteur à [7] pour les arguments très proches sur Ω_1 .

Remarque 5.11 Il est bien clair que nous pouvons déduire du corollaire 5.9 les mêmes résultats (théorèmes 5.3 et 5.6) sur la généricité des mesures d'entropie nulle ou non fortement mélangeantes sur Ω_1 ou Ω_{NF} qu'en courbure strictement négative.

2. Il n'est pas clair a priori qu'il soit possible de trouver une variété de rang un admettant au moins trois orbites périodiques non homotopes mais au plus deux orbites périodiques hyperboliques distinctes. On pourrait également décider d'appeler variété de rang un non élémentaire une telle variété, mais nous ne le ferons pas.

5.4.3 Propriétés de produit local, fermeture et transitivité sur Ω_1 et Ω_{NF}

- La propriété de produit local sur Ω_1 , ou sur Ω_{NF} quand Ω_{NF} est ouvert dans Ω résulte par exemple du lemme 1.3 de [Kn02]. Ce lemme assure qu'étant donnés deux vecteurs u, v assez proches l'un de l'autre, il existe un vecteur w proche des précédents t.q. les orbites $(g^t u)_{t \geq 0}$ et $(g^t w)_{t \geq 0}$ restent à distance bornée, et de même, les orbites $(g^t v)_{t \leq 0}$ et $(g^t w)_{t \leq 0}$ restent à distance bornée en temps négatif. Les définitions respectives de Ω_1 et de Ω_{NF} , et dans le deuxième cas le fait que Ω_{NF} soit ouvert dans Ω , assurent que si u et v sont assez proches l'un de l'autre, et sont dans Ω_1 (resp. Ω_{NF}), alors le vecteur w obtenu est également dans Ω_1 (resp. Ω_{NF}).

- Le lemme de fermeture en restriction à $\Omega \cap \mathcal{R}_1$ est dû à Eberlein [Eb96]. Sa preuve étant valide pour les vecteurs de rang minimal dans une variété de rang quelconque, nous l'avons réécrite dans le cas particulier (plus simple) de rang un dans [7] sur Ω_1 , et étendue dans [15] à Ω_{NF} .

Proposition 5.12 ([7,15]) *Soit M une variété de rang un non élémentaire. Le lemme de fermeture est satisfait en restriction à Ω_1 .*

Si Ω_{NF} est ouvert dans Ω , alors le lemme de fermeture est satisfait en restriction à Ω_{NF} .

Esquissons la preuve (quasi-identique à celle de [7]) sous l'hypothèse Ω_{NF} ouvert dans Ω .

Soit $u \in \Omega_{NF}$, $\varepsilon > 0$ et U un voisinage de u assez petit pour être dans Ω_{NF} . Soit $v \in U$, avec $d(g^t v, v)$ très petit pour un certain t grand. Il nous suffit, pour ε petit, de trouver une orbite périodique $p_0 \in B(u, \varepsilon) \subset U \subset \Omega_{NF}$ de période $t \pm \varepsilon$ qui piste l'orbite de v .

Pour trouver une telle orbite, on raisonne par l'absurde. On suppose que le lemme de fermeture n'est pas vérifié au voisinage de u , et on trouve donc une suite $v_n \rightarrow u$ et $t_n \rightarrow +\infty$, t.q. $d(g^{t_n} v_n, v_n) \rightarrow 0$, sans être approchée par des orbites périodiques. On relève ces vecteurs en $\tilde{v}_n \rightarrow \tilde{u}$ sur $T^1 \widetilde{M}$. Il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une isométrie φ_n qui, sur $T^1 \widetilde{M}$, envoie $g^{t_n} \tilde{v}_n$ sur \tilde{v}_n . Pour n assez grand, ces isométries sont hyperboliques, et leurs axes convergent vers la géodésique définie par \tilde{u} . On arrive alors facilement à une contradiction.

- La propriété de transitivité est vérifiée sur Ω lorsque $\Omega = T^1 M$ (condition dite de « dualité », voir [B95] pour démonstration et références). Nous l'avons démontrée sur Ω_1 dans [7], et par le même argument, sur Ω_{NF} quand cet ensemble est ouvert dans Ω .

Lemme 5.13 ([7, 15]) *Soit M une variété de rang un non élémentaire. Le flot géodésique est topologiquement transitif en restriction à Ω_1 .*

Si Ω_{NF} est ouvert dans Ω , alors le flot géodésique est transitif en restriction à Ω_{NF} .

Une fois encore, la démonstration sous l'hypothèse Ω_{NF} ouvert dans Ω est quasiment identique à celle de [7] sur Ω_1 .

Les orbites périodiques hyperboliques sont toutes incluses dans $\Omega_1 \subset \Omega_{NF}$. Il résulte du lemme de fermeture sur Ω_{NF} et du fait qu'il est ouvert que ces orbites périodiques hyperboliques sont denses dans Ω_{NF} .

À partir de là, on suit [7]. La transitivité s'obtient alors de la manière suivante. Étant donnés deux ouverts U_1 et U_2 , on choisit deux orbites périodiques hyperboliques $p_1 \in U_1$ et $p_2 \in U_2$. La version faible du produit local citée plus haut ([Kn02, lemme 1.3]) donne une trajectoire qui quand $t \rightarrow -\infty$ reste à distance bornée de l'orbite de p_1 , et quand $t \rightarrow +\infty$, à distance bornée de celle de p_2 . L'hyperbolicité de p_1 et p_2 assure que cette trajectoire est dans $\Omega_{hyp} \subset \Omega_{NF}$. Nous renvoyons à [7] pour plus de détails.

5.4.4 Quelques exemples

Nous avons démontré plus haut la généricité des mesures invariantes ergodiques de support plein en restriction à Ω_1 ou Ω_{NF} , quand ce dernier ensemble est ouvert. Il est tentant de se demander s'il est possible d'intégrer les rubans plats à notre étude. Dans [11], nous avons fourni des contre-exemples au théorème 5.1 sur tout Ω , en présence de cylindres plats. L'idée essentielle est contenue dans l'exemple que nous décrivons ci-dessous.

Soit S une surface de rang un, compacte, de genre 2, obtenue par exemple en « aplatissant » la métrique au voisinage de la géodésique simple fermée qui sépare S en deux tores à un trou, de sorte que S contient un cylindre plat $[-1, 1] \times S^1$ plongé isométriquement, dont nous représenterons la direction périodique verticalement.

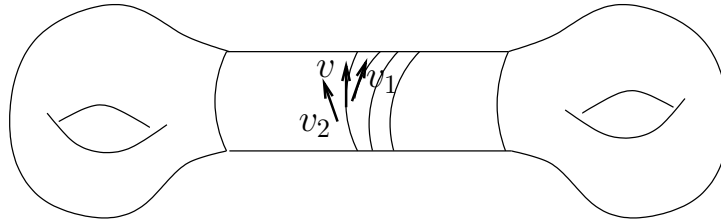


FIGURE 5.1 – Surface contenant un cylindre plat

Soit $v \in T^1S$ un vecteur vertical dans l'intérieur du cylindre, par exemple tangent à $\{0\} \times S^1$. Nous montrons le résultat suivant.

Théorème 5.14 ([11]) *Au voisinage d'un tel vecteur v , le lemme de fermeture n'est pas satisfait.*

De plus, la mesure périodique définie par l'orbite de v n'est pas dans l'adhérence des mesures de probabilité invariantes ergodiques de support plein dans Ω .

Démonstration : Montrons la première assertion. Comme S est compacte, l'ensemble non-errant Ω est égal à T^1S , et le flot géodésique est donc topologiquement transitif sur T^1S (voir [B95]). Considérons l'ouvert U_1 composé des vecteurs dont le point base est dans $B(\pi(v), \varepsilon) \cap]0, \varepsilon[\times S^1$, et dont la direction fait un angle $\theta \in]-\varepsilon, 0[$ avec la direction de v (dans le sens trigonométrique), et de même, l'ouvert U_2 composé des vecteurs dont le point base est dans $B(\pi(v), \varepsilon) \cap]-\varepsilon, 0[\times S^1$ et dont la direction

fait un angle $\theta \in]-\varepsilon, 0[$ avec celle de v . Par transitivité, il est possible de trouver $v_1 \in U_1$ et $t_1 > 0$ t.q. $g^{t_1}v_1 \in U_2$. Si ε est assez petit, $d(v_1, g^{t_1}v_1)$ est petite.

Rappelons que dans le cylindre, les trajectoires géodésiques suivent les règles de la géométrie euclidienne. En particulier une orbite qui entre dans le cylindre d'un côté doit nécessairement ressortir de l'autre côté. Si le lemme de fermeture était vrai au voisinage de v , pour ε assez petit, on pourrait donc fermer l'orbite $(g^t v_1)_{0 \leq t \leq t_1}$. Ceci impliquerait l'existence d'une orbite périodique qui entrerait dans le cylindre par la droite, spiralerait jusqu'à atteindre un ε -voisinage de v en pointant toujours vers la gauche, puis repartirait vers la droite. D'où une contradiction.

Montrons maintenant que la mesure portée par l'orbite de v n'est pas dans l'adhérence des mesures de probabilité invariantes ergodiques de support plein sur Ω .

Supposons à l'inverse que ce soit le cas. On peut alors trouver une telle mesure μ , invariante, ergodique, de support plein, et suffisamment proche de la mesure périodique associée à v pour donner une mesure au moins $3/4$ à l'ensemble U_ε des vecteurs dont le point base est à distance au plus ε de l'orbite de v , et la direction fait un angle $|\theta| \leq \varepsilon$ avec la direction de v . On peut également trouver un vecteur u générique pour μ , dont le point base ne soit pas dans le cylindre plat. En particulier, pour tous les temps T assez grands, l'orbite $(g^t u)_{0 \leq t \leq T}$ devrait passer une proportion de temps au moins $1/2$ dans U_ε . Mais à chaque passage dans U_ε , l'orbite de u doit d'abord traverser $[-1, -\varepsilon[\times S^1$, puis traverser $]\varepsilon, 1] \times S^1$, ou l'inverse. Rappelons une fois encore que les trajectoires dans le cylindre sont euclidiennes. Le théorème de Thalès assure que ce n'est pas possible, pour ε choisi assez petit. \square

Il est donc sans espoir d'étendre le théorème 5.1 à tout Ω en présence de plats périodiques d'intérieur non vide dans M . Nous pourrions espérer que seuls les plats périodiques posent problème, et travailler par exemple sur l'ensemble Ω_{NFP} des vecteurs qui ne bordent pas de plats périodiques.

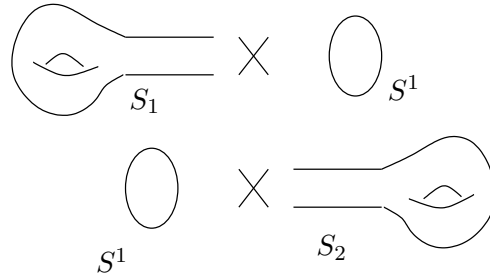


FIGURE 5.2 – Variété contenant un tore épaissi

Mais considérons maintenant l'exemple classique suivant, dû à Gromov [Gr78], et explicité et utilisé par exemple dans [Eb80] ou [Kn98]. Soit S_1 un tore à un trou, de bord homéomorphe à S^1 , avec une métrique à courbure négative qu'on aplatit en un cylindre plat homotope au bord. Soit $M_1 = S_1 \times S^1$. De même, soit S_2 la symétrique de S_1 par rapport à un plan vertical contenant ∂S_1 , et soit $M_2 = S^1 \times S_2$. Les deux variétés M_1 et M_2 sont des variétés de dimension 3 dont le bord est un tore euclidien \mathbb{T}^2 . On les recolle en une variété M qui contient autour du lieu de recollement un

« tore épaissi » euclidien, que nous noterons $[-1, 1] \times \mathbb{T}^2$ quelle que soit son épaisseur, pour simplifier.

Considérons sur le fibré unitaire tangent d'un tore « intérieur », par exemple $\{0\} \times \mathbb{T}^2$, une direction irrationnelle θ , et la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore $\{0\} \times \mathbb{T}^2$, relevée en une mesure invariante par le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent $T^1(\{0\} \times \mathbb{T}^2)$ supportée par les vecteurs qui pointent dans la direction θ . Cette mesure est ergodique. Et le même argument que dans l'exemple du cylindre, à savoir le théorème de Thalès, permet de montrer que cette mesure n'est pas dans l'adhérence des mesures invariantes ergodiques de support plein dans Ω_{NFP} .

Chapitre 6

Mesures de Gibbs, mesures d'équilibre

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats sur les mesures de Gibbs obtenus dans [14]. C'est un travail mathématiquement terminé, mais dont la rédaction finale prend du temps, car il englobe des généralisations de nombreux résultats connus dans le cas de la mesure dite de Bowen-Margulis-Patterson-Sullivan, dus essentiellement à Roblin [Ro03], mais aussi à Otal-Peigné [O-Pe04]. En particulier, il n'est pas accessible pour l'instant, raison pour laquelle nous avons choisi d'inclure un certain nombre de démonstrations.

Les mesures de Gibbs sont des mesures invariantes par un système dynamique, associées à des potentiels, i.e. des fonctions $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$, le plus souvent hölderiennes. Dans les bons cas, ces mesures ont de fortes propriétés stochastiques : ergodicité, mélange, décroissance exponentielle des corrélations, et de plus satisfont un principe variationnel : elles réalisent le maximum de la pression. L'étude de ces mesures et de leurs propriétés, très inspirée de la thermodynamique, est appelée précisément « formalisme thermodynamique ».

Dans un premier paragraphe, nous définissons les notions importantes de ce formalisme : pression, mesures de Gibbs et états d'équilibre, et nous présentons la construction des mesures de Gibbs utilisée dans [14].

Puis nous énonçons le « principe variationnel » obtenu dans [14] pour ces mesures de Gibbs. Nous démontrons que les différentes notions de pression présentées dans le premier paragraphe coïncident, et que lorsque la mesure de Gibbs construite est finie, c'est l'unique mesure d'équilibre. Nous suivons en cela les énoncés de Sarig [S99] et [S01] et les idées de [O-Pe04].

Nous ne rappelons pas dans ce mémoire les travaux effectués dans [2] sur ce sujet. Il s'agissait d'un travail de doctorat sur les mesures de Gibbs pour le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété convexe-cocompacte, en suivant la construction de ces mesures présentée dans [L94] dans le cas compact. J'y ai démontré des propriétés d'unique ergodicité du feuilletage fortement instable liées à ces mesures, inspirées des résultats de [Ro03], ainsi que des propriétés d'équidistribution de certaines moyennes horosphériques vers ces mesures de Gibbs. Certains de ces résultats ont été étendus dans [1] aux variétés géométriquement finies, et non publiés. Ils seront sans doute ajoutés dans [14], mais nous n'en parlons pas ici.

6.1 Définitions, construction, premières propriétés

Nous renvoyons par exemple à Bowen [Bow75], Walters [W82], Keller [Ke98].

Dans ce paragraphe, nous commençons par les définitions importantes du formalisme thermodynamique, puis nous présenterons la construction géométrique d'une famille de mesures qui sont les candidates naturelles à être les mesures de Gibbs dans notre cadre.

Dans tout le chapitre, M est une variété riemannienne connexe, complète, à courbure sectionnelle strictement négative pincée inférieure ou égale à -1 , non élémentaire, T^1M son fibré unitaire tangent. Nous notons \widetilde{M} son revêtement universel, $\partial\widetilde{M}$ son bord à l'infini, $\pi : T^1M \rightarrow M$ et $\pi : T^1\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ les projections naturelles. La distance riemannienne est notée d , qu'il s'agisse de la distance sur M , \widetilde{M} , T^1M ou $T^1\widetilde{M}$.

Nous supposons que le flot géodésique est *topologiquement mélangeant*, ce qui n'est pas toujours nécessaire, mais nous simplifiera les choses.

Les mesures de Gibbs m^f sont des mesures que l'on associe à une application **höldérienne** $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$. Dans ce qui suit, pour simplifier énoncés et notations, nous supposons de plus que f est **bornée et symétrique** ($f(-v) = f(v)$), mais nos résultats dans [14] sont valides sous la simple hypothèse de régularité höldérienne, avec quelques précautions que nous évitons de détailler ici. Nous noterons \widetilde{f} le relevé de f à $T^1\widetilde{M}$.

6.1.1 Pression, mesures d'équilibre, mesures de Gibbs

Dans ce paragraphe, nous introduisons trois notions a priori distinctes de pression, la pression de Gurevich, l'exposant critique, et une définition variationnelle de la pression. Nous verrons dans le théorème 6.6 qu'elles coïncident toutes les trois.

La *pression de Gurevich* du potentiel f pour le flot géodésique est le taux de croissance du nombre d'orbites périodiques du flot géodésique (g^t) sur T^1M , pondéré par le potentiel f . Cette notion apparaît dans les travaux de Sarig sur les décalages à alphabet dénombrable [S99] [S01], et est due à Gurevich dans le cas de l'entropie. À notre connaissance, elle n'avait pas encore été utilisée jusqu'ici dans un cadre non symbolique.

Sur une variété non compacte à courbure négative, il peut y avoir une infinité d'orbites périodiques de même longueur pour le flot géodésique. Lorsqu'on parle de croissance de ces orbites, il faut donc imposer une normalisation.

Nous noterons $V \subset T^1M$ un ouvert borné qui intersecte l'ensemble non-errant : $V \cap \Omega \neq \emptyset$, et $\mathcal{P}er(T)$, pour $T \geq 0$, l'ensemble des orbites périodiques du flot géodésique (comptées avec multiplicité) de longueur au plus T . Si $g \in \mathcal{P}er(T)$, nous noterons $\int_g f$ l'intégrale du potentiel f sur la géodésique périodique g . Définissons

$$Z_{M,f,V}(T) = \sum_{g \in \mathcal{P}er(T), g \cap V \neq \emptyset} e^{\int_g f}, \text{ et}$$

$$P_{Gur}(f, (g^t)) = \sup_{V \subset T^1M} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_{M,f,V}(T).$$

Nous verrons dans le théorème 6.5 que la limite supérieure ci-dessus est en réalité une limite, et que la pression de Gurevich ne dépend pas de V , pour peu que V ne soit pas trop petit, i.e. contienne le fibré unitaire tangent d'une boule de rayon raisonnable (fixé).

La *série de Poincaré* de Γ et de f est la série suivante, pour $s \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \widetilde{M}$:

$$P_{\Gamma, f}(s, x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma y} \tilde{f} - sd(x, \gamma y)}.$$

L'*exposant critique* $\delta_{\Gamma, f}$ de (Γ, f) est défini par

$$\delta_{\Gamma, f} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma y) \in [n, n+1[} e^{\int_x^{\gamma y} \tilde{f}}.$$

Nous verrons dans le théorème 6.4 que cette limite supérieure est une limite, et dans le théorème 6.5 que $\delta_{\Gamma, f} = P_{Gur}(f, (g^t))$. Remarquons dès maintenant que, comme nous avons supposé f bornée, $\delta_{\Gamma, f}$ ne diffère de $\delta_{\Gamma} = \delta_{\Gamma, 0}$ que de $\pm \|f\|_{\infty}$.

Notons $\mathcal{M} = \mathcal{M}^1(\Omega)$ l'ensemble des mesures de probabilité invariantes par le flot géodésique sur $\Omega \subset T^1M$. Introduisons la quantité

$$P_{\mathcal{M}}(f, (g^t)) = \sup_{m \in \mathcal{M}} h_m(g^1) + \int_{T^1M} f dm,$$

où $h_m(g^1)$ désigne l'entropie de m pour le temps 1 du flot géodésique, définie par exemple au chapitre précédent.

L'entropie étant une fonction convexe, on peut tout à fait définir $P_{\mathcal{M}}(f, (g^t))$ en prenant le supremum sur les mesures ergodiques de \mathcal{M} .

Comme il a été mentionné plus haut, il est possible de travailler avec des potentiels f non bornés. Dans ce cas, la quantité $\int_{T^1M} f dm$ n'a pas de raison d'être définie en général. On s'intéresse alors uniquement au sous-ensemble de \mathcal{M} des mesures m pour lesquelles f a une partie négative intégrable, ce qui assure que $P_{\mathcal{M}}(f, (g^t))$ est bien définie dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. C'est la convention adoptée dans [S99] et [S01].

Une *mesure d'équilibre* pour f est une mesure m réalisant le supremum ci-dessus, i.e. telle que $P_{\mathcal{M}}(f, (g^t)) = h_m(g^1) + \int_{T^1M} f dm$.

Le terme de *mesure de Gibbs* est très souvent employé, mais moins souvent défini hors du cadre symbolique. En dynamique symbolique, disons sur $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ pour simplifier, si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel höldérien, une mesure de Gibbs associée au potentiel f est une mesure m^f telle que pour tout cylindre $[a_0, \dots, a_n] \in \{0, 1\}^{n+1}$, on ait

$$C^{-1} \leq \frac{m^f([a_0, \dots, a_n])}{e^{S_n f(x) - nP(f)}} \leq C,$$

avec $C \geq 1$ une constante indépendante du cylindre considéré, $P(f)$ la pression de f pour le décalage sur Σ , $S_n f(x)$ la somme de Birkhoff de f évaluée en un point

quelconque $x \in [a_0, \dots, a_n]$.

Une généralisation naturelle pour un système dynamique quelconque sur un espace compact est de demander que la mesure de Gibbs donne une mesure prescrite aux boules dynamiques, encore appelées boules de Bowen. Pour être plus précise, introduisons quelques notations dans notre cadre. Si $v \in T^1M$, nous noterons $B(v, T, \varepsilon)$ l'ensemble des vecteurs $w \in T^1M$ tq $d(g^t v, g^t w) \leq \varepsilon$ pour tout $0 \leq t \leq T$. Si $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ est un potentiel höldérien, il est naturel d'appeler *mesure de Gibbs* une mesure t.q. pour toute boule $B(v, T, \varepsilon)$, on ait

$$C^{-1} \leq \frac{m^f(B(v, T, \varepsilon))}{e^{\int_0^T f \circ g^t v dt - TP(f)}} \leq C,$$

pour C une constante indépendante de v . Les mesures construites ci-dessous vérifient cette propriété lorsque Ω est compact, i.e. Γ est cocompact ou convexe-cocompact. C'est une conséquence directe de leur construction, et du « lemme de l'ombre » énoncé plus loin. Lorsque Ω n'est pas compact, les mesures que nous construisons ne vérifient cette propriété que pour des couples (v, T) t.q. v et $g^T v$ appartiennent à un même compact K , la constante C dépendant a priori du compact $K \subset \Omega$ considéré, mais pas de (v, T) .

6.1.2 Construction géométrique des mesures de Gibbs

La série de Poincaré $P_{\Gamma, f}(s, x, y)$ définie plus haut converge pour $s > \delta_{\Gamma, f}$ et diverge pour $s < \delta_{\Gamma, f}$, et ce, quels que soient les choix de x et y .

Une célèbre astuce due à Patterson permet de faire a priori comme si elle était divergente en $s = \delta_{\Gamma, f}$. Les valeurs d'adhérence de la famille de probabilités

$$\nu_{x, s}^f = \frac{1}{P_{\Gamma, f}(s, x)} \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{f} - s d(x, \gamma x)} \delta_{\gamma \cdot x},$$

pour $s > \delta_{\Gamma, f}$ quand $s \rightarrow \delta_{\Gamma, f}$ sont alors des probabilités de support $\Lambda_\Gamma \subset \partial \widetilde{M}$.

Notons $(\nu_x^f)_{x \in \widetilde{M}}$ une famille de valeurs d'adhérence obtenues pour la même sous-suite $s_n \rightarrow \delta_{\Gamma, f}$. Elles vérifient alors les relations classiques

$$\frac{d\nu_x^f}{d\nu_y^f}(\xi) = e^{\int_x^\xi (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}) - \int_y^\xi (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f})} \quad \text{et} \quad \gamma_* \nu_x^f = \nu_{\gamma \cdot x}^f, \quad \text{pour tous } x, y \in \widetilde{M} \text{ et } \gamma \in \Gamma.$$

La différence d'intégrales dans l'exponentielle ci-dessus a un sens du fait que $\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}$ est höldérienne, et que les rayons géodésiques $[x, \xi)$ et $[y, \xi)$ sont asymptotes.

On construit alors une mesure \tilde{m}^f sur $T^1 \widetilde{M}$, invariante par Γ et par le flot géodésique en utilisant les coordonnées de Hopf. Soit $o \in \widetilde{M}$ un point arbitraire fixé. On définit

$$d\tilde{m}^f(v) = e^{\int_{v^-}^{v^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}) - \int_o^{v^-} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}) - \int_o^{v^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f})} d\nu_o^f(v^-) d\nu_o^f(v^+) dt.$$

L'écriture $\int_{v^-}^{v^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}) - \int_o^{v^-} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f}) - \int_o^{v^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma, f})$ est un abus de notation. En toute rigueur, il faut introduire un point sur la géodésique $(v^- v^+)$, par exemple

le point base $\pi(v)$ du vecteur v , et considérer la somme des deux quantités $\int_{\pi(v)}^{v^-} (f - \delta_{\Gamma,f}) - \int_o^{v^-} (f - \delta_{\Gamma,f})$, et $\int_{\pi(v)}^{v^+} (f - \delta_{\Gamma,f}) - \int_o^{v^+} (f - \delta_{\Gamma,f})$, qui sont toutes deux finies du fait que la fonction f est höldérienne.

L'invariance de \tilde{m}^f par le flot géodésique est claire par construction. Son invariance par Γ est un calcul élémentaire utilisant les propriétés de $(\nu_x^f)_{x \in \tilde{M}}$.

Le désormais classique argument de Hopf assure que lorsque cette mesure m^f est finie, elle est ergodique. Une variante de cet argument donne mieux.

Théorème 6.1 (Babillot [Ba02]) *Supposons que le flot géodésique sur T^1M est topologiquement mélangeant. Si la mesure m^f construite ci-dessus est finie, alors elle est fortement mélangeante (et donc ergodique).*

Le corollaire suivant est dû à Ledrappier [L94], et à Patterson [Pat76] lorsque $f = 0$. Il est vrai sans hypothèse de mélange, sous la seule hypothèse que m^f soit ergodique.

Corollaire 6.2 (Ledrappier [L94]) *Sous les mêmes hypothèses, la suite $(\nu_{x,s}^f)$ converge vers ν_x^f quand $s \rightarrow \delta_{\Gamma,f}$, de sorte que la construction ci-dessus donne lieu à une unique mesure m^f .*

Nous appellerons désormais cette mesure m^f la ⁽¹⁾ *mesure de Gibbs* associée à f . La terminologie sera justifiée plus bas par la définition de mesure de Gibbs proposée ci-dessus, et le « lemme de l'ombre » énoncé ci-dessous. Ce lemme de l'ombre est dû à Sullivan [Su79] dans le cas $f \equiv 0$, et dans notre cadre à Coudène [Cou03] et Mohsen [Mo07]. Si $x, y \in \tilde{M}$, et $R > 0$, l'ombre $\mathcal{O}_x(B(y, R))$ est l'ensemble des $\xi \in \partial \tilde{M}$ t.q. le rayon géodésique joignant x à ξ intersecte la boule de centre y et de rayon R .

Théorème 6.3 (Lemme de l'Ombre, [Cou03], [Mo07]) *Soit $(\nu_x^f)_{x \in \tilde{M}}$ la famille de mesures construites ci-dessus sur Λ_Γ . Soit $R > 0$ fixé, pas trop petit. Il existe une constante $C > 0$ t.q. pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait*

$$\frac{1}{C} e^{\int_x^{\gamma y} (f - \delta_{\Gamma,f})} \leq \nu_x^f(\mathcal{O}_x(B(\gamma y, R))) \leq C e^{\int_x^{\gamma y} (f - \delta_{\Gamma,f})}.$$

Pour $v \in T^1 \tilde{M}$, la boule dynamique $B(v, T, \varepsilon)$ est comparable aux ombres au sens suivant. Il existe des constantes $R_0 \geq R_1 > 0$ et $0 < t_0 < t_1$ ne dépendant que de ε et des bornes sur le pincement de la courbure, telles que, si $w = (w^-, w^+, t_w) \in B(v, T, \varepsilon)$, avec $v = (v^-, v^+, t_v)$, alors

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_{\pi(v)}(B(\pi(g^{-t_1}v), R_1)) \times \mathcal{O}_{\pi(v)}(B(\pi(g^T v), R_1)) \times [t_v - R_1, t_v + R_1] \\ & \quad \subset B(v, T, \varepsilon) \subset \\ & \mathcal{O}_{\pi(v)}(B(\pi(g^{-t_0}v), R_0)) \times \mathcal{O}_{\pi(v)}(B(\pi(g^T v), R_0)) \times [t_v - R_0, t_v + R_0]. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant x comme le point base $\pi(v)$ de v . À des constantes près, uniformes sur tout compact K , la mesure m^f est proche de $\nu_x^f \times \nu_x^f \times dt$. Alors, le

1. En réalité, on ne sait pas a priori s'il y a unicité de « la » mesure de Gibbs. Si m^f est finie, c'est l'unique mesure donnée par la construction de Patterson-Sullivan ci-dessus, nous démontrerons aussi que c'est l'unique mesure d'équilibre pour f et que c'est une mesure de Gibbs pour f .

lemme de l'ombre permet d'affirmer que si K est un compact de l'ensemble non-errant Ω , $v \in K$ un vecteur de ce compact, et $T > 0$ un temps de retour de $g^T v$ dans K , la mesure $m^f(B(v, T, \varepsilon))$ est comparable à $\exp(\int_0^T f(g^t v) dt - T\delta_{\Gamma, f})$, à des constantes près ne dépendant que de K , f , ε mais pas de (v, T) .

6.1.3 Propriétés élémentaires de la pression

Pour relier les différentes notions de pression, nous aurons besoin du résultat ci-dessous. Comme sa démonstration est très directement inspirée du résultat analogue de Roblin [Ro02] dans le cas $f \equiv 0$, nous l'omettons ici.

Si $A \subset \partial\widetilde{M}$, et $x \in \widetilde{M}$, alors $\mathcal{C}_x(A)$ désigne l'enveloppe convexe de A et x dans $\widetilde{M} \cup \partial\widetilde{M}$.

Théorème 6.4 ([14]) *L'exposant critique $\delta_{\Gamma, f}$ vérifie*

$$\delta_{\Gamma, f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma y) \leq T} e^{\int_x^{\gamma y} f}.$$

Si $A \subset \partial\widetilde{M}$ est un ouvert qui intersecte Λ_{Γ} , alors l'exposant critique est également la limite du taux de croissance de la fonction de comptage angulaire ci-dessous :

$$\delta_{\Gamma, f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma y) \leq T, \gamma y \in \mathcal{C}_x(A)} e^{\int_x^{\gamma y} \tilde{f}}.$$

Si A, B sont deux ouverts de $\partial\widetilde{M}$ qui intersectent l'ensemble limite, alors on a également

$$\delta_{\Gamma, f} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log \sum_{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma x) \leq T, \gamma x \in \mathcal{C}_x(A), \gamma^{-1} \cdot x \in \mathcal{C}_x(B)} e^{\int_x^{\gamma x} \tilde{f}}.$$

A l'aide de ce résultat, nous montrons le résultat suivant.

Théorème 6.5 ([14]) *Soit $V \subset T^1 M$ un ouvert qui vérifie $V \cap \Omega \supset T^1 B(x, R) \cap \Omega \neq \emptyset$, avec $R > 0$ assez grand pour que $T^1 B(x, R - R_0) \cap \Omega \neq \emptyset$ (où R_0 dépend uniquement des constantes d'hyperbolicité au sens de Gromov de \widetilde{M}).*

Alors la quantité $\frac{1}{T} \log Z_{M, f, V}(T)$ converge vers $\delta_{\Gamma, f}$ quand $T \rightarrow +\infty$. Autrement dit,

$$P_{Cur}(f, (g^t)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_{M, f, V}(T) = \delta_{\Gamma, f}.$$

La démonstration du théorème 6.5 suit de très près les arguments des corollaires 1 et 2 de [Ro02], ainsi que celle du théorème 6.4 ci-dessus, elle-même très inspirée de [Ro02]. Comme elle illustre tout de même bien le lien entre deux notions de pression qui nous intéressent, nous la donnons ici.

Démonstration: Montrons d'abord que $\limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_{M, F, V}(T) \leq \delta_{\Gamma, F}$. Soit $x \in \widetilde{M}$ un point dont le projeté sur M appartient à $\pi(V \cap \Omega)$, où $\pi : T^1 M \rightarrow M$ est la projection canonique.

Soit $g \in \mathcal{P}_{er}(T)$ t.q. $g \cap V \neq \emptyset$. Soit \tilde{g} un relevé de g à $T^1\widetilde{M}$, de projection A_g sur \widetilde{M} , choisis de sorte que la distance de x à A_g soit inférieure au diamètre de V . Soit $\gamma_g \in \Gamma$ l'isométrie hyperbolique d'axe A_g , de longueur de translation $\ell(g)$, et qui translate sur A_g dans la direction donnée par \tilde{g} .

Soit y la projection de x sur A_g . Alors l'union des segments géodésiques $[x, y] \cup [y, \gamma_g \cdot y] \cup [\gamma_g \cdot y, \gamma_g \cdot x]$ est uniformément proche du segment géodésique $[x, \gamma_g \cdot x]$. Comme f est höldérienne, la différence $\left| \int_g f - \int_x^{\gamma_g \cdot x} \tilde{f} \right|$ est bornée par une constante $C(V, f)$ qui dépend du diamètre de V , des constantes hölder de f , et de $\|f\|_\infty$. La somme $Z_{M, f, V}(T)$ est alors majorée par

$$e^{C(V, f)} \sum_{\gamma \in \Gamma, l(\gamma) \leq T + C(V, f)} e^{\int_x^{\gamma \cdot x} \tilde{f}}.$$

L'inégalité souhaitée en découle, lorsque $T \rightarrow +\infty$.

Montrons maintenant que $\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_{M, f, V}(T) \geq \delta_{\Gamma, f}$.

On peut supposer que $V = T^1B(\bar{x}, R)$ est le fibré unitaire tangent d'une boule ouverte $B(\bar{x}, R)$ de rayon $R > R_0$, assez grand ($R_0 = R_0(\widetilde{M})$ sera défini plus loin). Soit $\tilde{B} =$ le relevé de $B(x, R)$ à \widetilde{M} , et $\tilde{V} = T^1\tilde{B}$. Notons encore x le centre de \tilde{B} .

Par hypothèse, $V \cap \Omega \neq \emptyset$ et $T^1B(\bar{x}, R - R_0) \cap \Omega \neq \emptyset$. On peut donc choisir deux ouverts A et B disjoints de $\partial\widetilde{M}$, de sorte que toutes les géodésiques joignant A à B intersectent $T^1\tilde{B}(x, R - R_0) \subset V$. On peut supposer que A et B intersectent tous deux Λ_Γ .

Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot x \in \mathcal{C}_x(A)$ et $\gamma^{-1} \cdot x \in \mathcal{C}_x(B)$. Soient $\xi \in A$ et $\eta \in B$ les extrémités des rayons géodésiques partant de x et passant respectivement par $\gamma \cdot x$ et $\gamma^{-1} \cdot x$.

Vu le choix de A et B , la géodésique $(\xi\eta)$ intersecte $\tilde{B}(x, R - R_0)$. Par convexité, on voit que c'est encore vrai pour la géodésique joignant $\gamma \cdot x$ à $\gamma^{-1} \cdot x$. On en déduit que $|d(\gamma \cdot x, \gamma^{-1} \cdot x) - d(x, \gamma \cdot x) - d(x, \gamma^{-1} \cdot x)| \leq 2(R - R_0)$. Le corollaire 22 page 151 de [G-H90] implique alors qu'il existe une constante $T_0(\tilde{M}, R) > 0$, telle que si $d(x, \gamma \cdot x) \geq T_0$, alors γ est une isométrie hyperbolique.

De plus, l'inégalité ci-dessus dans le triangle $(x, \gamma \cdot x, \gamma^{-1} \cdot x)$ et l'hyperbolicité de \widetilde{M} impliquent que x est à distance au plus R_0 de l'axe de γ , où R_0 est une constante géométrique qui ne dépend que de la constante d'hyperbolicité (au sens de Gromov) de \widetilde{M} .

On en déduit d'une part que l'axe de γ intersecte la boule $\tilde{B}(x, R)$, et d'autre part que la longueur de translation de γ vérifie $|l(\gamma) - d(x, \gamma \cdot x)| \leq 2R_0$.

Soit g_γ l'orbite du flot géodésique sur T^1M de longueur $l(\gamma)$, dont le relevé à $T^1\widetilde{M}$ est l'ensemble des vecteurs tangents à l'axe de γ , dans la direction de translation de γ . Par construction, $g_\gamma \cap V \neq \emptyset$, et sa période vérifie $l(g_\gamma) = l(\gamma) = d(x, \gamma \cdot x) \pm 2R_0$.

Comme \tilde{f} est höldérienne, on obtient aisément

$$\left| \int_x^{\gamma \cdot x} \tilde{f} - \int_{g_\gamma} f \right| \leq C,$$

où C est une constante dépendant de f , V , \widetilde{M} , R_0 , mais pas de γ .

Maintenant, étant donnée une orbite périodique $g \in \mathcal{P}_{er}(T)$, t.q. $g \cap V \neq \emptyset$, le nombre de $\gamma \in \Gamma$, t.q. $\gamma.x \in \mathcal{C}_x(A)$, $\gamma^{-1}x \in \mathcal{C}_x(B)$, $d(x, \gamma.x) \in [l(g), l(g) + 2R_0]$, dont l'axe se projette sur g est fini et uniformément borné, de sorte qu'on obtient l'inégalité

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, T_0 \leq d(x, \gamma x) \leq T, \gamma.x \in \mathcal{C}_x(A), \gamma^{-1}x \in \mathcal{C}_x(B)} e^{\int_x^{\gamma.x} \tilde{f}} \leq Cste \sum_{g \in \mathcal{P}_{er}(T), g \cap V \neq \emptyset} e^{\int_g f} = Cste.Z_{M,f,V}(T),$$

où les constantes dépendent de f , V , \tilde{M} mais pas de T ! Il suffit alors de faire tendre $T \rightarrow +\infty$ pour obtenir, à l'aide du théorème 6.4,

$$\liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log Z_{M,f,V}(T) \geq \delta_{\Gamma,F}.$$

□

6.2 Principe variationnel

Nous venons de voir au théorème 6.5 que parmi les trois notions de pression définies plus haut, deux d'entre elles, la pression de Gurevich et l'exposant critique de la série de Poincaré $P_{\Gamma,f}$, coïncident. Nous allons voir que ces deux pressions coïncident également avec $P_{\mathcal{M}}(f)$.

6.2.1 Énoncé

Comme mentionné précédemment, dans le théorème ci-dessous, l'hypothèse f symétrique est superflue, et l'hypothèse f bornée peut être affaiblie ; nous les mettons pour simplifier les énoncés. En suivant la méthode de [O-Pe04], nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 6.6 ([14]) *Soit M une variété riemannienne complète à courbure négative pinçée, non élémentaire. Soit $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ un potentiel höldérien borné (symétrique). Alors on a*

$$P_{Gur}(f, (g^t)) = \delta_{\Gamma,f} = P_{\mathcal{M}}(f, (g^t)).$$

De plus, si la mesure de Gibbs m^f associée à f est finie, et normalisée en une mesure de probabilité, alors c'est l'unique mesure d'équilibre de f , i.e. l'unique mesure de probabilité invariante sur T^1M qui vérifie l'égalité

$$P_{\mathcal{M}}(f, (g^t)) = h_{m^f}(g) + \int_{T^1M} f dm^f.$$

Si m^f est infinie, alors f n'admet pas de mesure d'équilibre : aucune mesure de probabilité invariante sur T^1M ne réalise l'égalité ci-dessus.

Notons un résultat similaire dans un cas très particulier (flot géodésique positif sur la surface modulaire), via un argument de codage, dans [I10].

Nous commençons par parler du cas simple des variétés compactes, puis nous présentons la démonstration du fait que $P_{\mathcal{M}}(f) \leq \delta_{\Gamma,f}$ et du cas d'égalité lorsque la mesure de Gibbs est finie ou infinie, et nous finissons en montrant l'inégalité inverse $\delta_{\Gamma,f} \leq P_{\mathcal{M}}(f)$.

6.2.2 Cas des variétés compactes ou convexe-cocompactes

Si la variété M est compacte ou convexe-cocompacte, la construction des mesures de Gibbs donne lieu à des mesures finies. Dans ce cas, le théorème 6.6 assure que pour tout potentiel $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ höldérien, la mesure de Gibbs m^f est également l'unique mesure d'équilibre de f .

En fait, dans cette situation, il est possible de démontrer ce résultat de manière bien plus courte. En effet, le lemme de l'ombre et un résultat de Vadim Kaimanovich [K90] permettent alors de calculer l'entropie de m^f , et de vérifier qu'elle est égale à $\delta_{\Gamma,f} - \int_{T^1M} f dm^f$. Et sous ces hypothèses, l'ensemble non-errant Ω du flot géodésique est compact, de sorte qu'on sait a priori qu'il existe un unique état d'équilibre pour f . Ceci a été rédigé en détail dans [1, paragraphe 2.5].

6.2.3 Démonstration de l'inégalité $P_{\mathcal{M}}(f) \leq \delta_{\Gamma,f}$

Feuilletage fortement instable

Si $v \in T^1M$, sa *variété fortement instable* est l'ensemble

$$W^{su}(v) = \{w \in T^1M, d(g^{-t}v, g^{-t}w) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty\}.$$

La variété fortement stable est définie de manière analogue en considérant les temps positifs. Si M est une surface hyperbolique, les variétés fortement (in)stables coïncident avec les orbites du flot horocyclique (in)stable. Contrairement au reste du mémoire, nous utilisons ici les variétés instables, pour rester plus près des conventions de [O-Pe04] et [Ro03]. Ces variétés fortement instables forment un feuilletage, noté \mathcal{W}^{su} , de T^1M et de $T^1\widetilde{M}$.

Un cocycle pour le feuilletage est une application c définie sur l'ensemble des couples de vecteurs d'une même feuille, vérifiant la relation $c(v_1, v_2) + c(v_2, v_3) = c(v_1, v_3)$ si les v_i sont tous trois sur la même variété fortement instable. Si $f : T^1M \rightarrow \mathbb{R}$ est höldérienne, symétrique, bornée, la quantité ci-dessous est un cocycle continu sur \mathcal{W}^{su} :

$$c^f(v, w) = \int_0^{+\infty} f \circ g^{-t}(v) - f \circ g^{-t}(w) dt.$$

Ce cocycle est nul dès que f est constante. Nous aurons également besoin de la quantité définie sur $\partial\widetilde{M} \times \widetilde{M} \times \widetilde{M}$ par

$$C_\xi^f(x, y) = \int_x^\xi \tilde{f} - \int_y^\xi \tilde{f}.$$

Si $f \equiv 1$, on retrouve le classique cocycle de Busemann. La convention de signe est celle de [1,2], opposée à celle de [14]. Soient $\tilde{v}, \tilde{w} \in T^1\widetilde{M}$, v, w leurs projetés sur T^1M , et x, y leurs points base sur \widetilde{M} . Par définition, et puisque f est symétrique, si $\tilde{w} \in W^{su}(\tilde{v})$, on a $C_{v^-}^f(x, y) = c^f(v, w)$.

La mesure de Gibbs m^f construite plus haut induit une famille de mesures $\mu_{W^{su}(v)}^f$ sur les variétés fortement instables de T^1M . Ces mesures sont d'abord définies sur les variétés fortement instables de $T^1\widetilde{M}$ par

$$d\tilde{\mu}_{W^{su}(\tilde{v})}^f(w) = e^{\int_{\pi(w)}^{w^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma,f}) - \int_x^{w^+} (\tilde{f} - \delta_{\Gamma,f})} d\nu_x^f(w^+) = e^{C_{w^+}^{f - \delta_{\Gamma,f}}(\pi(w), x)} d\nu_x^f(w^+),$$

où $x \in \widetilde{M}$ est un point arbitraire fixé. On peut vérifier que ces mesures sont Γ -invariantes, et passent bien au quotient en des mesures $\mu_{W^{su}(v)}^f$ sur les variétés fortement instables. De plus, localement, on peut écrire

$$dm^f(v) = d\mu_{W^{su}(v)}^f e^{\int_{\pi(v)}^{v^-} (f - \delta_{\Gamma, f}) - \int_x^{v^-} (f - \delta_{\Gamma, f})} d\nu_x^f(v^-) dt.$$

Partitions, mesures conditionnelles

Nous renvoyons à [P],[R], [O-Pe04] pour des détails sur les notions présentées ici.

Soit (X, \mathcal{B}, m) un espace de probabilité, $\overline{\mathcal{B}}$ la tribu complétée par les ensembles de m -mesure nulle, et ζ une partition de X en ensembles non nécessairement mesurables. On note $\zeta(x)$ l'élément de ζ qui contient x . On dit que ζ est une *partition m -mesurable* s'il existe un ensemble $N \subset X$ de m -mesure pleine et une famille dénombrable d'ensembles $A_n \in \overline{\mathcal{B}}$, qui soient des unions d'éléments de ζ , et tels que si $\zeta_1 \neq \zeta_2$ sont deux éléments de ζ , il existe A_n qui vérifie $\zeta_1 \cap N \subset A_n$ et $\zeta_2 \cap N \subset X \setminus A_n$, ou bien inversement $\zeta_2 \cap N \subset A_n$ et $\zeta_1 \cap N \subset X \setminus A_n$.

Proposition 6.7 *Soit ζ une partition m -mesurable. Il existe une famille de mesures de probabilité $m_{\zeta(x)}$ sur $\zeta(x)$ muni de la tribu induite $\zeta(x) \cap \overline{\mathcal{B}}$, telles que*

- *pour tout $A \in \mathcal{B}$, l'application $x \rightarrow m_{\zeta(x)}(A \cap \zeta(x))$ est mesurable,*
- *$m(A) = \int_X m_{\zeta(x)}(A \cap \zeta(x)) dm(x)$. Ces mesures sont appelées mesures conditionnelles de m par rapport à la partition ζ .*

Cette famille de mesures est unique au sens où deux telles familles de mesures coïncident m -presque sûrement.

La proposition suivante est essentiellement due à Ledrappier-Strelcyn dans [L-St] dans un cadre très général, mais a été redémontrée dans [O-Pe04, Prop. 1 et 4] dans le cadre qui nous intéresse.

Proposition 6.8 *Soit m une probabilité invariante par (g^t) et ergodique, et $\tau > 0$ un temps t.q. g^τ est ergodique. Il existe une partition m -mesurable ζ sur T^1M telle que :*

- *ζ est décroissante, i.e. $g^{-\tau}\zeta \succ \zeta$,*
- *ζ est génératrice pour g^τ , i.e. $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} g^{-n\tau}\zeta$ est la partition en points,*
- *ζ est subordonnée au feuilletage fortement instable, et plus précisément, pour m -presque tout $v \in T^1M$, $\zeta(v)$ est un voisinage borné de v dans $W^{su}(v)$,*
- *$h_m(g^\tau) = h_m(g^\tau, \zeta) = \int_{T^1M} -\log m_{\zeta(v)}(g^{-\tau}\zeta(v)) dm(v)$.*

Etant donnée une partition ζ subordonnée au feuilletage fortement instable, on pourrait imaginer que les mesures $\mu_{W^{su}(v)}^f$ normalisées en des probabilités sur $\zeta(v) \subset W^{su}(v)$ soient les mesures conditionnelles de m^f sur ζ . Le lemme ci-dessous montre qu'il n'en est rien, sauf lorsque f est constante.

Lemme 6.9 ([14]) *Supposons que m^f est finie, et normalisée en une mesure de probabilité. Soit ζ une partition m^f -mesurable subordonnée à \mathcal{W}^{su} . Alors la mesure conditionnelle $m_{\zeta(v)}^f$ est définie par*

$$dm_{\zeta(v)}^f(w) = \frac{1}{\int_{\zeta(v)} e^{c_f(z,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(z)} \mathbf{1}_{\zeta(v)}(w) e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w).$$

Du fait que c_f est un cocycle pour le feuilletage instable, la formule ci-dessus ne dépend pas du vecteur v choisi dans $\zeta(v)$.

Démonstration: La mesurabilité vient de la définition de $\mu_{W^{su}(v)}^f$. Relevons A à l'intérieur d'un domaine fondamental pour l'action de Γ sur $T^1\widetilde{M}$. Observons que $\mathbf{1}_{\zeta(v)}(w) = \mathbf{1}_{\zeta(w)}(v)$, $\beta_v(x, \pi(v)) = \beta_w(x, \pi(w))$, $C_{v^-}^f(\pi(v), x) = C_{w^-}^f(\pi(w), x) + c^f(v, w)$, et $\mu_{W^{su}(v)}^f = \mu_{W^{su}(w)}^f$. Rappelons que sous nos hypothèses, ν_x^f n'a pas d'atomes. Notons $\partial^2\widetilde{M} = \partial\widetilde{M} \times \partial\widetilde{M} \setminus \text{Diagonale}$, puis calculons $\int_{T^1\widetilde{M}} m_{\zeta(v)}^f(A \cap \zeta(v)) dm^f(v)$. Pour raccourcir le calcul suivant, par abus de notation, nous identifions $W^{su}(v)$ avec $\partial\widetilde{M} \setminus \{v^-\}$. Nous renvoyons à [14] pour une rédaction plus rigoureuse, mais plus longue.

$$\begin{aligned}
& \int_{T^1\widetilde{M}} \int_{\zeta(v)} \mathbf{1}_A(w) \mathbf{1}_{\zeta(w)}(v) dm_{\zeta(v)}^f(w) dm^f(v) \\
&= \int_{\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}} \left(\int_{\partial\widetilde{M}} \frac{\mathbf{1}_A(w) \mathbf{1}_{\zeta(w)}(v)}{\int_{\xi(w)} e^{c_f(w,v) + c_f(z,w)} d\mu_{W^{su}(w)}^f(z)} e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w) \right) \\
& \quad d\mu_{W^{su}(v)}^f(v) e^{C_{v^-}^f(\pi(v), x) - \delta_{\Gamma, f} \beta_{v^-}(\pi(v), x)} d\nu_x^f(v^-) dt \\
&= \int_{\partial^2\widetilde{M} \times \mathbb{R}} \frac{\mathbf{1}_A(w)}{\int_{\zeta(w)} e^{c_f(z,w)} d\mu_{W^{su}(w)}^f(z)} \left(\int_{\partial\widetilde{M}} \mathbf{1}_{\zeta(w)}(v) e^{c_f(v,w)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(v) \right) \\
& \quad d\mu_{W^{su}(w)}^f(w) e^{C_{w^-}^f(\pi(w), x) - \delta_{\Gamma, f} \beta_{w^-}(\pi(w), x)} d\nu_x^f(w^-) dt \\
&= \int_{T^1M} \mathbf{1}_A(w) dm^f(w).
\end{aligned}$$

C'est le résultat voulu. □

Mesures d'équilibre et démonstration de l'inégalité $P_{\mathcal{M}}(f) \leq \delta_{\Gamma, f}$

Nous montrons dans ce paragraphe la proposition suivante.

Proposition 6.10 *Si m^f est finie, alors m^f vérifie $h_{m^f}(g^1) + \int_{T^1M} f dm^f = \delta_{\Gamma, f}$. Si m est une probabilité invariante ergodique pour (g^t) , alors $h_m(g^1) + \int_{T^1M} f dm \leq \delta_{\Gamma, f}$, et il y a égalité si et seulement si m^f est finie et $m = m^f$. En particulier, $P_{\mathcal{M}}(f, g) \leq \delta_{\Gamma, f}$.*

Nous suivons très directement la stratégie de [O-Pe04]. Nous donnons les preuves quand les calculs diffèrent de ceux de [O-Pe04], et nous nous contentons sinon des énoncés.

Si la mesure m^f est finie, et g^τ est ergodique pour m^f , soit ζ la partition donnée par la proposition 6.8. On a alors

$$h_{m^f}(g^\tau) = \int_{T^1M} -\log m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v)) dm^f(v).$$

Le lemme ci-dessous permet de définir la mesure conditionnelle de m^f sur une partition ζ associée par la proposition 6.8 à une autre mesure de probabilité invariante ergodique m . Ce sera crucial pour traiter le cas d'égalité, et montrer que m^f est l'unique mesure d'équilibre possible de f .

Lemme 6.11 *Soit m une probabilité invariante ergodique pour (g^t) et soit τ un temps pour lequel m est ergodique pour g^τ . Soit ζ la partition associée à m et τ par la proposition 6.8. Alors $m_{\zeta(v)}^f$ est encore défini pour m -presque tout v , et on a*

$$-\log m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v)) = \delta_{\Gamma,f\tau} - \int_{g^\tau v}^v f + G(v) - G(g^\tau(v)) \quad (6.2.1)$$

où $G(v) = -\log \int_{\zeta(v)} e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w)$.

La formule ci-dessus dépend apparemment de $v \in \zeta(v)$ et pas seulement de $\zeta(v)$. Mais le choix d'un autre vecteur $v' \in \zeta(v)$ t.q. $g^\tau v' \in \zeta(g^\tau v)$ pour définir $m_{\zeta(v)}^f$ mène à une différence $\int_v^{g^\tau v} f - \int_{v'}^{g^\tau v'} f$ qui est égale au cobord $c_f(g^\tau v, g^\tau v') - c_f(v, v')$, de sorte que seul le cocycle G est modifié.

Démonstration : Les mesures $m_{\zeta(v)}^f$ sont bien définies sur m -presque tout élément $\zeta(v)$ de ζ , car $\mu_{W^{su}(v)}^f$ est définie sur toutes les variétés fortement instables $W^{su}(v)$, et de plus, m -presque sûrement, $v \in \Omega$ et $\zeta(v)$ est un voisinage ouvert borné de v dans $W^{su}(v)$. Comme $\mu_{W^{su}(v)}^f$ est de support plein dans $W^{su}(v) \cap \Omega$, on en déduit $\int_{\zeta(v)} e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w) > 0$ m -p.s.

Rappelons que $g^{-\tau}\zeta(v) = g^{-\tau}(\zeta(g^\tau v)) \subset \zeta(v)$. Calculons

$$\begin{aligned} m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v)) &= \frac{\int_{\zeta(g^\tau(v))} e^{c_f(g^{-\tau}z,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(g^{-\tau}z)}{\int_{\zeta(v)} e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w)} \\ &= e^{-\tau\delta_{\Gamma,f} + \int_{g^\tau v}^v f} \frac{\int_{\zeta(g^\tau(v))} e^{c_f(z,g^\tau(v))} d\mu_{W^{su}(g^\tau(v))}^f(z)}{\int_{\zeta(v)} e^{c_f(w,v)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w)} \end{aligned}$$

La deuxième égalité vient du fait que $e^{c_f(g^{-\tau}z,v)} = e^{c_f(g^\tau v,v) + c_f(g^{-\tau}z,z) + c_f(z,g^\tau v)}$ et $d\mu_{W^{su}(v)}^f(g^{-\tau}z) = e^{-\tau\delta_{\Gamma,f} + \int_{g^\tau v}^z f} d\mu_{W^{su}(g^\tau v)}^f(z)$. On en déduit alors $-\log m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v)) = \tau\delta_{\Gamma,f} - \int_{g^\tau v}^v f + G(v) - G(g^\tau v)$, où $G(v) = -\log \int_{\zeta(v)} e^{-c_f(v,w)} d\mu_{W^{su}(v)}^f(w)$. \square

Une application directe du lemme 8 ⁽²⁾ de [O-Pe04] nous assure que l'intégrale du cobord $G(g^\tau v) - G(v)$ est nulle, et donne, en intégrant sur T^1M par rapport à la mesure m , la proposition suivante.

2. C'est en particulier à cet endroit que, si f n'est pas bornée, nous avons besoin comme dans [S99, S01], de considérer uniquement des mesures invariantes m pour lesquelles la partie négative de f est intégrable.

Proposition 6.12 *Soit m une mesure de probabilité invariante ergodique. Alors*

$$\int_{T^1M} -\log m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v)) dm(v) = \tau\delta_{\Gamma,f} - \tau \int_{T^1M} f dm.$$

En particulier, si m^f est finie, donc ergodique, c'est un état d'équilibre pour f . Plus précisément, on a alors

$$h_{m^f}(g^\tau) = \tau\delta_{\Gamma,f} - \tau \int_{T^1M} f dm^f.$$

Soit maintenant m une mesure de probabilité invariante ergodique, et τ un temps ergodique pour m . Soit ζ la partition m -mesurable donnée par la proposition 6.8. À l'aide du lemme 6.11, définissons pour m -presque tout v

$$\psi(v) = \frac{m_{\zeta(v)}^f(g^{-\tau}\zeta(v))}{m_{\zeta(v)}(g^{-\tau}\zeta(v))}, \quad \text{quand } m_{\zeta(v)}(g^{-\tau}\zeta(v)) > 0, \quad \text{et } \psi(v) = +\infty \text{ sinon.}$$

Lemme 6.13 ([O-Pe04, fait 9]) *Les fonctions ψ et $\log \psi$ sont m -intégrables, et $\int \psi dm \leq 1$.*

Soit m une probabilité invariante ergodique. Le lemme donne $\int_{T^1M} \psi dm \leq 1$. De plus, la formule 6.2.1 donne $\log \psi(v) = -\delta_{\Gamma,f}\tau + \int_v^{g^\tau v} f - G(v) + G(g^\tau v) - \log m_{\zeta(v)}(g^{-\tau}\zeta(v))$. La proposition 6.12 implique alors $\int_{T^1M} \log \psi(v) dm(v) = -\delta_{\Gamma,f}\tau + \tau \int_{T^1M} f dm + h_m(g^\tau)$. L'inégalité de Jensen donne $\int_{T^1M} \log \psi dm \leq \log \int_{T^1M} \psi dm \leq 0$, de sorte que $h_m(g) + \int_{T^1M} f dm \leq \delta_{\Gamma,f}$.

Le cas d'égalité se traite exactement comme dans [O-Pe04] page 35. Si une mesure de probabilité invariante ergodique m vérifie $h_m(g) + \int_{T^1M} f dm = \delta_{\Gamma,f}$, on utilise le cas d'égalité de l'inégalité de Jensen pour déduire l'égalité $\psi \equiv 1$ m -presque sûrement, puis la structure produit des mesures m^f et l'ergodicité de m pour conclure à l'égalité $m = m^f$ si m^f est finie et à une contradiction sinon.

6.2.4 Démonstration de l'inégalité $\delta_{\Gamma,f} \leq P_{\mathcal{M}}(f)$

La stratégie de la démonstration, encore une fois inspirée de [O-Pe04], est la suivante.

Pour un système dynamique (X, ϕ) sur un espace métrique (X, d) compact, on dispose d'une autre notion de pression, notée $P_d(f, \phi)$ à l'aide d'ensembles (ε, T, ϕ) séparés. Dans notre cadre, sous réserve d'être sur un compact K invariant par le flot géodésique, cette notion de pression va coïncider avec $P_{\mathcal{M}}(f, g|_K)$.

Pour tout $\delta < \delta_{\Gamma,f}$ et $R > 0$, on va construire un compact invariant K tel que $P_d(f, g|_K) \geq \delta \frac{R}{R+1/2}$. On en déduira alors, en faisant tendre $R \rightarrow +\infty$ et $\delta \rightarrow \delta_{\Gamma,f}$, que

$$\delta_{\Gamma,f} \leq \sup_K P_d(f, g|_K) = \sup_K P_{\mathcal{M}}(f, g|_K) \leq P_{\mathcal{M}}(f),$$

ce qui conclura la preuve du théorème 6.6.

Définition de la pression $P_d(f, g|_K)$

Soit (X, d) un espace métrique compact (qui sera bientôt un compact $K \subset T^1M$ invariant par le flot géodésique, muni d'une distance, par exemple la distance riemannienne sur T^1M), et $\phi = (\phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot d'homéomorphismes sur X (le flot géodésique $g|_K$). Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application höldérienne.

Un ensemble $E \subset X$ est (T, ε) -séparé si pour tous $x \neq y \in E$, il existe $0 \leq t \leq T$, tel que $d(\phi^t x, \phi^t y) \geq \varepsilon$. Définissons alors

$$P_d(f, \phi, \varepsilon, T) = \sup \left\{ \sum_{x \in E} e^{\int_0^T f \circ \phi^t(x) dt} \mid E \text{ ensemble } (T, \varepsilon)\text{-séparé} \right\},$$

puis

$$P_d(f, \phi) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log P_d(f, \phi, \varepsilon, T).$$

Enonçons le principe variationnel dans ce cadre.

Théorème 6.14 (Walters [W82, th 9.10]) *Si X est un espace métrique compact, ϕ un flot continu sur X et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, alors on a*

$$P_d(f, \phi) = \sup_{m \in \mathcal{M}} h_m(\phi^1) + \int_X f dm = P_{\mathcal{M}}(f, \phi).$$

Ce théorème est énoncé dans [W82] dans le cas d'une application, mais l'énoncé ci-dessus se montre de manière analogue. Remarquons également que si X est compact, toutes les distances sont équivalentes, et la pression ne dépend pas de d . Si T^1M n'est pas compact, les distances ne sont pas toutes équivalentes. Néanmoins, nous allons construire un compact K invariant, sur lequel le choix de d sera indifférent.

Construction d'un bon compact K

Comme annoncé plus haut, nous allons construire pour tout $\delta < \delta_{\Gamma, f}$ un compact $K \subset T^1M$ invariant par le flot géodésique, tel que $P_d(f, g|_K) \geq \delta$. Ceci suffira d'après ci-dessus à montrer l'inégalité $\delta_{\Gamma, f} \leq P_{\mathcal{M}}(f, g)$. Lorsque les détails de la construction ne diffèrent pas de [O-Pe04, pages 37-39], nous ne les justifions pas.

• Soit $o \in \widetilde{M}$ un point fixé, et $\delta < \delta_{\Gamma, f}$. La série de Poincaré $P_{\Gamma, f}(s, o, o)$ diverge en $s = \delta$. On en déduit que pour tout $C > 0$ il existe une suite $R_i \rightarrow +\infty$ telle que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma, d(o, \gamma \cdot o) \simeq R_i \pm 1/4} e^{\int_o^{\gamma \cdot o} f} \geq C e^{\delta R_i}.$$

• Soit $0 < \theta < \pi/4$. Par compacité de la sphère unité $T_o^1 \widetilde{M}$, on peut trouver deux vecteurs $v, w \in T_o^1 \widetilde{M}$, une suite $R_i \rightarrow +\infty$, et des ensembles $\mathcal{G}(R_i, \theta) \subset \Gamma$, tels que

1. $\sum_{\gamma \in \mathcal{G}(R_i, \theta)} e^{\int_o^{\gamma \cdot o} f} \geq e^{\delta R_i},$

2. pour tous $\gamma \neq \gamma' \in \mathcal{G}(R_i, \theta)$, $d(o, \gamma.o) = R_i \pm 1/4$ et $d(\gamma.o, \gamma'.o) \geq C_0$, C_0 étant une constante géométrique fixée,
3. le vecteur tangent en o au segment $[o, \gamma.o]$ fait un angle au plus $\theta/4$ avec v , et le vecteur tangent en $\gamma.o$ à $[o, \gamma.o]$ fait un angle au plus $\theta/4$ avec $\gamma.w$.

De plus, quitte à modifier légèrement o et $\mathcal{G}(R_i, \theta)$, on peut choisir $v = w$. (Cette étape est délicate à écrire proprement, nous renvoyons à [14] pour les détails.

- Fixons $0 < \theta < \pi/4$ assez petit, et $\mathcal{G} = \mathcal{G}(R_i, \theta)$, pour $R_i = R$ assez grand.

• Soit pour tout $k \geq 1$, \mathcal{G}^k l'ensemble des mots de longueur $k \geq 1$ formés à l'aide des éléments de \mathcal{G} . Alors $\#(\mathcal{G}^k) = (\#\mathcal{G})^k$.

De plus, il existe une constante $\eta(\theta)$, qui tend vers 0 avec θ , telle que toute union de segments géodésiques faisant un angle au moins $\pi - \theta$ entre eux est dans un $\eta(\theta)$ -voisinage tubulaire de la géodésique joignant ses extrémités. Si $g = g_{i_1} \dots g_{i_k} \in \mathcal{G}^k$, le segment géodésique $[o, g.o]$ contient donc dans son $\eta(\theta)$ -voisinage l'union des segments $[o, g_{i_k}.o] \cup [g_{i_k}.o, g_{i_{k-1}}.g_{i_k}.o] \cup \dots \cup [g_{i_1}^{-1}.go, go]$. Du fait que f est höldérienne, on en déduit qu'il existe une constante $C(f) > 0$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\sum_{g \in \mathcal{G}^k} e^{\int_o^{g.o} \tilde{f}} \geq e^{-C(f)} \sum_{g = g_{i_1} \dots g_{i_k} \in \mathcal{G}^k} e^{\int_o^{g_{i_k}.o} \tilde{f} + \dots + \int_{g_{i_1}^{-1}.go}^{go} \tilde{f}} \geq e^{-C(f)} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}} e^{\int_o^{g.o} \tilde{f}} \right)^k \geq e^{-C(f)} e^{\delta k R}.$$

• Soit pour tout $g \in \mathcal{G}^k$, l_g le lacet projeté du segment $[o, g.o]$ sur M et c_g la géodésique fermée à laquelle il est librement homotope. Alors l_g est dans le $\eta(\theta)$ -voisinage de c_g . Soit v^g le vecteur unitaire tangent à c_g au point image par cette homotopie du projeté de o sur M .

• Soit $K \subset T^1M$ le compact invariant par le flot géodésique constitué des vecteurs unitaires tangents aux géodésiques qui restent dans le $3\eta(\theta)$ -voisinage des géodésiques c_g , pour $g \in \mathcal{G}$. En particulier, K contient toutes les géodésiques fermées c_g , pour $g \in \mathcal{G}^k$, pour tout $k \geq 1$.

• Le Fait 11 de [O-Pe04] nous assure qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$, l'ensemble des vecteurs v^g , pour $g \in \mathcal{G}^k$, est $(k(R + 1/2), \varepsilon)$ -séparé. Du fait que f est höldérienne et bornée, et que les segments c_g et l_g sont $\eta(\theta)$ -proches, on déduit qu'il existe une constante $C'(f, R) > 0$ telle que

$$\sum_{g \in \mathcal{G}^k} e^{\int_0^{kR} f \circ g^t(v^g) dt} \geq e^{-C'(f, R)} \left(\sum_{g \in \mathcal{G}} e^{\int_o^{g.o} \tilde{f}} \right)^k \geq e^{-C'(f, R) - C(f)} e^{k\delta R}.$$

En particulier, on considérant $\frac{1}{k(R+1/2)} \log$ de la quantité ci-dessus et en faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit le résultat voulu, à savoir que $P_d(f, g|_K) \geq \delta \frac{R}{R+1/2}$. En passant à la limite quand $\delta \rightarrow \delta_{\Gamma, f}$ et $R \rightarrow +\infty$, on obtient bien $P_{\mathcal{M}}(f, g) \geq \delta_{\Gamma, f}$.

Chapitre 7

Perspectives

7.1 Horocycles

Les résultats présentés aux chapitres 2 et 3 posent entre autres les questions suivantes.

En ce qui concerne la densité des demi-horocycles, au vu des résultats du chapitre 2, une question reste en suspens, celle de comprendre ce qui se passe pour l'horocycle $(h^s v)_{s \geq 0}$ d'un vecteur v dont la géodésique $(g^t v)_{t \geq 0}$ intersecte une infinité de géodésiques périodiques de longueur bornée, mais suivant un angle qui tend vers 0. Cela revient à considérer des vecteurs v t.q. $(g^t v)_{t \geq 0}$ spirale de plus en plus longtemps autour de géodésiques périodiques. Il est vraisemblable que dans ce cas encore, on puisse montrer que $(h^s v)_{s \geq 0}$ et $(h^s v)_{s \leq 0}$ sont simultanément denses.

La question de l'équidistribution des horocycles n'a de sens que dans des situations où les mesures invariantes sont connues. Plusieurs généralisations peuvent venir à l'esprit.

En dimension supérieure, on peut donner des énoncés d'équidistribution d'horosphères. Certains ont été déjà démontrés dans [1], [4], et plus récemment [13]. Cela pose des problèmes de moyennabilité que nous ne développerons pas ici, mais les idées sont fondamentalement les mêmes.

En dimension supérieure, on peut également s'intéresser aux flots unipotents. Par exemple, les célèbres travaux de Ratner permettent de comprendre le comportement des orbites de flots unipotents, et de leurs mesures invariantes finies. Je souhaiterais me pencher sur les variétés hyperboliques de volume infini, et les mesures de Radon infinies de ces flots. Le premier cas qui vient à l'esprit, à savoir celui d'une variété hyperbolique convexe-cocompacte de dimension 3, pose déjà de nombreuses questions. Quelles sont les mesures invariantes (infinies) par ces flots unipotents ? Y a-t-il densité, et mieux encore équidistribution, des orbites vers ces mesures invariantes ?

Dans le chapitre 3 nous avons vu un énoncé d'équidistribution d'horocycles dans une situation où le flot horocyclique n'est pas uniquement ergodique.

Ce genre de résultats ne peut s'étendre que dans des situations où toutes les mesures invariantes ergodiques pour un système dynamique donné sont connues.

On pourrait imaginer les étendre aux revêtements de surfaces hyperboliques convexe-cocompactes ou géométriquement finies, mais ceci nécessiterait sans doute

un travail technique disproportionné en comparaison avec le résultat, qui est très certainement encore vrai dans ce cadre.

En ce qui concerne le flot horocyclique, cela pose la question de comprendre les mesures invariantes ergodiques, sur le fibré unitaire tangent de surfaces géométriquement infinies plus compliquées. Dans [S10], Omri Sarig met en bijection les mesures invariantes ergodiques non triviales du flot horocyclique avec les fonctions propres positives extrémales du Laplacien de la surface, sur une très large classe de surfaces géométriquement infinies. Il serait intéressant d'en déduire des énoncés d'équidistribution non triviaux dans ce cadre.

Un peu moins généralement, on peut s'intéresser à des revêtements galoisiens (ou réguliers) quelconques d'une surface hyperbolique compacte, i.e. des surfaces $S = \Gamma \backslash \mathbb{H}$, pour lesquelles $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$ est un sous-groupe distingué d'un groupe Γ_0 cocompact. C'est la situation étudiée par Ledrappier et Sarig dans [L-S07], où ils relient mesures invariantes ergodiques non triviales pour (h^s) et fonctions propres positives minimales du Laplacien.

Cela dit, dans cette situation, il est tentant de vouloir relier l'ensemble des mesures invariantes ergodiques pour le flot horocyclique sur T^1S avec la géométrie du groupe de revêtement Γ_0/Γ ; on peut par exemple penser à la notion de cône asymptotique, qui permet de comprendre ce que peut signifier « partir à l'infini » dans le groupe Γ_0/Γ et pourrait peut-être permettre d'envisager un prolongement des résultats présentés ici.

Dans une autre direction, on peut noter que ce chapitre est le seul dans lequel nous avons besoin d'un codage du flot géodésique par une dynamique symbolique. Le codage est un outil bien entendu extrêmement puissant, mais dont on aimerait pouvoir se passer, pour obtenir des arguments plus géométriques. Il est tout à fait envisageable de se passer de ce codage pour déterminer le cycle asymptotique $\xi_\infty(v)$ d'un vecteur v générique pour une mesure m_Ξ , puisque les arguments de la démonstration sont assez géométriques. En revanche, obtenir un résultat comme la proposition 3.4 sans dynamique symbolique semble beaucoup plus ardu, mais intéressant.

Les résultats obtenus au chapitre 4 avec François Maucourant devraient pouvoir s'étendre en dimension supérieure. Les résultats d'équidistribution nécessaires à cela ne posent pas de problème, et sont d'ailleurs énoncés dans [13], modulo le fait qu'ils nécessitent de considérer des suites de Følner sur le feuilletage horosphérique. Ceci est un travail que nous souhaitons aborder prochainement.

7.2 Variétés à courbure négative ou nulle et mesures invariantes

Au vu des deux contre-exemples présentés à la fin du chapitre 5, on peut considérer que le théorème 5.10 bis est relativement optimal, et qu'il est raisonnable de travailler sur Ω_{NF} , en dehors des plats euclidiens.

Néanmoins, ce qui pose certainement problème dans le contre-exemple du tore épais est la présence de plats non périodiques dans l'adhérence des plats périodiques

(car les directions rationnelles du tore sont denses dans les directions irrationnelles), mais pas dans l'adhérence des orbites périodiques hyperboliques (car le tore euclidien a été épaissi).

Dans notre travail en cours [15], nous souhaitons comprendre mieux ce qui se passe en présence de plats non périodiques. Par exemple, si Ω_{NFP} est ouvert dans Ω (ce qui exclut la présence de tores euclidiens plongés isométriquement dans M), ou bien dans le dernier exemple ci-dessus, lorsque le tore est d'épaisseur nulle (analogue d'un cylindre plat infinitésimal de largeur nulle dans le premier contre-exemple, qui ne pose précisément aucun problème). Ceci nécessite de comprendre plus finement la dynamique au voisinage des plats. Ce travail est inachevé, et sera poursuivi à court terme.

7.3 Mesures de Gibbs, formalisme thermodynamique

Dans [14], nous étendons de nombreux résultats classiques pour la mesure d'entropie maximale aux mesures de Gibbs. Nous avons présenté ici ceux qui généralisent [O-Pe04], mais l'essentiel du mémoire de Roblin [Ro03] s'étend également (résultats sur le comptage et la croissance pondérée par le potentiel f des orbites du groupe).

Plusieurs questions se posent. D'abord, beaucoup de résultats de [14] sont énoncés sous l'hypothèse de finitude de la mesure de Gibbs m^f . Mais hors des variétés compactes ou convexes-cocompactes, pour lesquelles ces mesures sont toujours finies, nous disposons de peu de critères, excepté dans [D-O-P00] pour la mesure d'entropie maximale sur les variétés géométriquement finies, et la généralisation de [Cou03] pour les mesures de Gibbs, toujours sur des variétés géométriquement finies. Ces critères s'expriment en termes de convergence/divergence de certaines séries liées aux sous-groupes paraboliques du groupe fondamental Γ de M , pondérées par le potentiel f .

Dans un cadre différent, Sarig [S99, S01] obtient des critères de finitude de ces mesures de Gibbs sur des décalages à alphabet dénombrable, en termes de convergence/divergence de certaines séries liées aux orbites périodiques du système dynamique considéré, séries pondérées par le potentiel f .

Je souhaite m'inspirer de ces différents résultats pour parvenir, dans le cadre géométrique du chapitre 6, à des critères de finitude des mesures m^f en termes de croissance ou convergence/divergence de certaines séries analogues aux séries de Poincaré.

D'autres questions peuvent également être intéressantes.

En dehors de la mesure d'entropie maximale, il est classique que la mesure de Liouville est une mesure de Gibbs, lorsque la variété est compacte. C'est probablement encore le cas sur des variétés de volume fini, du moins lorsque la courbure ne varie pas trop vite à l'infini. Mais lorsque cette mesure est infinie et ergodique, est-elle toujours donnée par la construction décrite au chapitre 6, à la Patterson-Sullivan? Le résultat semble crédible, mais la méthode de démonstration reste à trouver. Le principe variationnel est un très bon outil pour cela, mais ... ne s'applique pour l'instant qu'aux mesures finies.

Pour lier les questions abordées aux chapitres 6 et 5, on peut imaginer s'intéresser aux mesures de Gibbs sur les variétés de rang un. Knieper [Kn98] a déjà étudié le cas de la mesure d'entropie maximale, et ses résultats valides en restriction à l'ensemble des vecteurs de rang un d'une variété compacte, se généralisent probablement sans la moindre difficulté aux mesures de Gibbs. D'un autre côté, rappelons cette difficile conjecture, toujours ouverte à ce jour, qui affirme que sur une variété compacte de rang un, la mesure de Liouville est ergodique. (On sait que sa restriction à l'ensemble des vecteurs de rang un l'est). Si la construction des mesures de Gibbs pouvait se faire raisonnablement, non seulement sur les vecteurs de rang un, mais sur le fibré unitaire tangent tout entier, à l'aide d'un résultat de type principe variationnel, on pourrait peut-être identifier la mesure de Liouville comme une mesure de Gibbs, et déduire son ergodicité. Un tel objectif est sans aucun doute très (trop ?) ambitieux. Mais on peut imaginer faire fonctionner la construction des mesures de Gibbs sur un ensemble plus gros que celui considéré par Knieper, un peu dans l'esprit des résultats du chapitre 5, où nous testons différents sous-ensembles invariants pour le flot géodésique.

7.4 Autres projets

Je souhaite également, dans les prochaines années, m'intéresser à des questions dynamiquement proches sur des systèmes différents, ainsi qu'à des questions de nature plus géométrique en courbure négative.

Pour rester dans les systèmes dynamiques de nature géométrique, mentionnons les flots géodésique et horocyclique de Teichmüller et leurs propriétés, sur l'espace de Teichmüller associé à une surface de translation non compacte, par exemple un revêtement abélien d'une surface compacte (étudiés récemment entre autres par Pascal Hubert, Barak Weiss, et Pat Hooper). Pour l'instant, il est difficile de dépasser une simple analogie par exemple avec la situation décrite au chapitre 3, mais le sujet est riche.

Une question plus géométrique que je me suis posé à l'occasion du travail [14] (en particulier le paragraphe 6.2.4) est la suivante. Etant donné un groupe discret, non élémentaire, Γ d'isométries de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n , est-il possible d'approcher son exposant critique δ_Γ par celui de « bons » sous-groupes $\Gamma' < \Gamma$? Un résultat de Doyle [Do] assure que c'est impossible lorsque $n \geq 3$, si l'on se limite aux sous-groupes de Schottky de Γ . Mais il est probable que le résultat est vrai si on considère les sous-groupes de type fini. Entre les deux, est-il possible d'avoir le résultat en considérant uniquement les sous-groupes convexe-cocompacts de Γ , qui ont des propriétés dynamiques bien meilleures que les sous-groupes seulement de type fini. Étonnamment, ce résultat semble non trivial même lorsque le gros groupe Γ est géométriquement fini.

Chapitre 8

Liste des travaux

Tous ces travaux sont disponibles sur <http://www.lamfa.u-picardie.fr/schapira/recherche/index.html>, à l'exception de [14], en cours de rédaction et [15] qui est un travail en cours, numéroté pour y faire référence dans le texte.

Les travaux [1] à [6] correspondent à ma thèse, les articles qui en sont issus, et un survol de ces travaux sur les surfaces hyperboliques. Le livre [8] est un ouvrage collectif auquel j'ai participé, non présenté ici. Nous parlons dans ce mémoire des travaux [7] et [9] à [14] principalement, et brièvement de [15], en détaillant les idées des résultats issus de [14] et [15], non encore accessibles.

Les travaux [7], [9], [10], [11], [12], [13] sont joints à ce mémoire en annexe.

- [1] *Propriétés ergodiques du feuilletage horosphérique d'une variété à courbure négative*, thèse de doctorat de l'université d'Orléans, 2003.
- [2] *On quasi-invariant transverse measures for the horospherical foliation of a negatively curved manifold*, Ergodic Theory Dynam. Systems Vol. 24 no.1 (2004), 227-256.
- [3] *Mesures transverses quasi-invariantes et limites de moyennes longitudinales*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (4) (2003), 349-352.
- [4] *Lemme de l'Ombre et non divergence des horosphères d'une variété géométriquement finie*, Annales Inst. Fourier (2004), no. 54 (4), 939-987.
- [5] *Equidistribution of the horocycles of a geometrically finite surface*, Int. Math. Res. Notices (2005), 2447-2471.
- [6] *Propriétés ergodiques du flot horocyclique d'une surface hyperbolique géométriquement finie*, Actes Sémin. Théorie Spectrale et Géométrie (2003), Institut Fourier, Grenoble, 147-164.
- [7] *Generic measures for hyperbolic flows on non compact spaces*, avec Yves Coudène, Israël J. Maths **179** (2010).
- [8] *Théorèmes ergodiques pour des actions de groupes*, L'Enseignement mathématique, (2010) avec C. Anantharaman, JP Anker, M. Babillot, A. Bonami, B. Demange, S. Grellier, F. Havard, P. Jaming, E. Lesigne, P. Maheux, JP Otal, JP Schreiber.
- [9] *The generic points for the horocycle flow on a class of hyperbolic surfaces with infinite genus*, with O Sarig (2008), Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, Art. ID rnm 086, 37 pp.

- [10] *Density and equidistribution of half horocycles on geometrically finite surfaces*, accepté pour publication à Journal of the London Mathematical Society (2011).
- [11] *Counterexamples in nonpositive curvature*, Discrete and continuous Dynamical systems, 1095 - 1106, Vol. 30, no. 4, (2011) avec Y. Coudène.
- [12] *Density of half-horocycles on geometrically infinite hyperbolic surfaces*, prépublication, soumise pour publication (2011). Version française disponible sur ma page.
- [13] *Distribution of orbits in \mathbb{R}^2 of a finitely generated group of $SL(2, \mathbb{R})$* , avec François Maucourant, prépublication (2011).
- [14] *Gibbs measures on negatively curved manifolds*, avec Frédéric Paulin et Mark Pollicott, en cours de rédaction (2011).
- [15] *Generic measures for geodesic flows on nonpositively curved manifolds*, travail en cours, avec Yves Coudène (2011).

Bibliographie

- [ABC10] F. Abdenur, Bonatti Christian et Crovisier Sylvain, *Nonuniform hyperbolicity for C^1 -generic diffeomorphisms*, Israël J. Maths. **183** (2011).
- [An67] Anosov, D. V. *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature.*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **90** (1967).
- [Ba96] Babillot, Martine *Géodésiques et horocycles sur le revêtement d'homologie d'une surface hyperbolique*, Séminaire théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1996), 89-104.
- [Ba02] Babillot, Martine *On the mixing property for hyperbolic systems*, Israel J. Math. **129** (2002), 61-76.
- [Ba02bis] Babillot, Martine *Points entiers et groupes discrets : de l'analyse aux systèmes dynamiques*, Panoramas et synthèses, **13** Paris, SMF (2002).
- [Ba-L98] Babillot Martine ; Ledrappier François, *Lalley's theorem on periodic orbits of hyperbolic flows*, Ergodic Th. & Dynam. Syst. **18** (1998) 17–39.
- [Ba-L98bis] Babillot, Martine ; Ledrappier, François, *Geodesic paths and horocycle flow on abelian covers*, Proc. International Colloquium on Lie groups and Ergodic theory, Tata Institute of Fundamental Research, Narosa Publishing House, New Delhi (1998), 1-32.
- [B95] Ballmann, Werner *Lectures on spaces of nonpositive curvature*. With an appendix by Misha Brin, DMV Seminar **25**, Birkhäuser Verlag, Basel (1995).
- [Bow75] Bowen, Rufus, *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes in Math. **470**, Springer-Verlag, Berlin-New York (1975).
- [Bow-Se79] Bowen Rufus and Series, Caroline ; *Markov maps associated with Fuchsian groups*, Publ. Math. IHÉS **50** (1979), 153–170.
- [Bu90] Burger, Marc *Horocycle flow on geometrically finite surfaces*, Duke Math. J. **61** no.3 (1990), 779-803.
- [Cou03] Coudène, Yves, *Gibbs measures on negatively curved manifolds*. J. Dynam. Control Systems **9** (2003), no. 1, 89-101.
- [Cou05] Coudène, Yves, *A note on horospherical points*, Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), no. 3, 793-798.
- [D00] Dal'bo, Françoise *Topologie du feuilletage fortement stable*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 3, 981–993.
- [D-O-P00] Dal'bo, Françoise ; Otal, Jean-Pierre ; Peigné, Marc *Séries de Poincaré des groupes géométriquement finis*, Israel J. Math. **118** (2000), 109-124.

- [Da78] Dani, S. G. *Invariant measures of horospherical flows on noncompact homogeneous spaces*, Invent. Math. **47** (1978), no. 2, 101–138.
- [Da-S84] Dani, S. G.; Smillie, John *Uniform distribution of horocycle orbits for Fuchsian groups*. Duke Math. J. **51** (1984), no. 1, 185–194.
- [Do] Doyle, Peter G. *On the bass note of a Schottky group*, Acta Math. **160** (1988), no. 3-4, 249-284.
- [Eb72] Eberlein, Patrick B. *Geodesic flows on negatively curved manifolds I*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 492-510.
- [Eb73] Eberlein, Patrick B. *Geodesic flows on negatively curved manifolds II*, Transactions of the American Mathematical Society, **178** (1973), 57-82.
- [Eb80] Eberlein, Patrick B. *Lattices in spaces of nonpositive curvature*, Annals of Maths. **111** no.3, 435-476.
- [Eb96] Eberlein, Patrick B. *Geometry of nonpositively curved manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL (1996).
- [Fi93] Fisher, Albert *Integer Cantor sets and an order-two ergodic theorem*, Ergodic Theory Dynam. Systems **13** (1993), no. 1, 45-64.
- [F73] Furstenberg, Harry *The unique ergodicity of the horocycle flow*. Recent advances in topological dynamics (Proc. Conf., Yale Univ., New Haven, Conn., 1972; in honor of Gustav Arnold Hedlund), pp. 95–115. Lecture Notes in Math., **318**, Springer, Berlin, 1973.
- [G-H90] Ghys, Étienne; de la Harpe, Pierre *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov* (Bern, 1988), Progr. Math. **83**, Birkhäuser Boston, Boston, MA (1990), 1-25.
- [Gr78] Gromov, Mikhail *Manifolds of negative curvature*, J. Diff. Geom. **13** (1978), 231-242.
- [Go04] Gorodnik, Alexander *Uniform distribution of orbits on spaces of frames*. Duke Math. J. **122** (2004) no. 3 549-589.
- [Go-W07] Gorodnik, Alexander; Weiss, Barak *Distribution of lattice orbits on homogeneous varieties*, Geom. Func. An. **17** (2007) 58-115.
- [H98] Jacques Hadamard *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 4 (1898)
- [H36] Hedlund, G.A. *Fuchsian groups and transitive horocycles*, Duke Math. J. **2** (1936), 530-542.
- [Ho36] Hopf, Eberhard *Fuchsian groups and ergodic theory*. Trans. Amer. Math. Soc. **39** (1936), no. 2, 299-314.
- [I10] Iommi, Godofredo, *Thermodynamic formalism for the positive geodesic flow on the modular surface*, arXiv :1009.4623v1 [math.DS]
- [K90] Kaimanovich, Vadim A. *Invariant measures of the geodesic flow and measures at infinity on negatively curved manifolds*, Ann. I.H.P., Physique Théorique **53**, no. 4 (1990), 361-393.
- [Ka-H95] Katok, Anatole; Hasselblatt, Boris *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Cambridge Univ. Press. (1995).

- [Ke98] Keller, Gerhard *Equilibrium States in Ergodic theory*, London Math. Soc. Student Texts **42**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [Kn98] Knieper, Gerhard *The uniqueness of the measure of maximal entropy for geodesic flows on rank one manifolds*, Ann. of Math. (2) **148** (1998), no. 1, 291-314.
- [Kn02] Knieper, Gerhard *Hyperbolic dynamics and Riemannian geometry*, Handbook of dynamical systems, Vol. 1A, 453–545, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [La89] S. P. Lalley : *Renewal theorems in symbolic dynamics, with applications to geodesic flows, non-Euclidean tessellations and their fractal limits*, Acta Math. **163** (1989), no. 1-2, 1–55.
- [L94] Ledrappier, François *Structure au bord des variétés à courbure négative*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble (1994-95), 93-118.
- [L99] Ledrappier, François *Distribution des orbites des réseaux sur le plan réel*. C.R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **329** no. 1 (1999) 61-64.
- [L01] Ledrappier, François *Ergodic properties of some linear actions*. Pontryagin conference, 8,, Topology (Moscow, 1998). J. Math. Sci. (New York) **105** no. 2 (2001) 1861-1875.
- [L-P03] Ledrappier, François ; Pollicott, Mark *Ergodic properties of linear actions of (2×2) -matrices*. Duke Math. J. **116** no. 2 (2003) 353-388.
- [L-P05] Ledrappier, François ; Pollicott, Mark *Distribution results for lattices in $SL(2, \mathbb{Q}_p)$* . Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **36** no. 2 (2005) 143-176.
- [L-S06] Ledrappier François, Sarig Omri, *Unique ergodicity for non-uniquely ergodic horocycle flows*, Disc. Cts. Dynam. Syst. **16** (2006), Katok Birthday Issue, 411–433.
- [L-S07] Ledrappier François ; Sarig, Omri, *Invariant measures for the horocycle flow on periodic hyperbolic surfaces*, Israel J. Math. **160** (2007) 281-317.
- [L-St] Ledrappier, François ; Strelcyn, Jean-Marie *A proof of the estimation from below in Pesin's entropy formula*. Ergodic Theory Dynam. Systems 2 (1982), no. 2, 203-219.
- [M07] Maucourant, François *Homogeneous asymptotic limits of Haar measure of semisimple linear groups and their lattices*, Duke Math. J. **136** (2007), no. 2, 357-399.
- [M-W11] Maucourant, François, Weiss, Barak *Lattice actions on the plane revisited*, to appear in Geometriae Dedicata
- [Mo07] Mohsen, Olivier *Le bas du spectre d'une variété hyperbolique est un point selle* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **40** (2007), 191-207.
- [N02] Nogueira Arnaldo, *Orbit distribution on \mathbb{R}^2 under the natural action of $SL(2, \mathbb{Z})$* . Indag. Math. (N.S.) **13** (2002), no. 1, 103-124.
- [N10] Nogueira Arnaldo, *Lattice orbit distribution on \mathbb{R}^2* , Ergodic Theory and Dynamical Systems **30** (2010), no. 4, 1201-1214.
- [O-Sh10] Oh, Hee ; Shah, Nimish, *Equidistribution and Counting for orbits of geometrically finite hyperbolic groups*, preprint arXiv:1001.2096 (2010).

- [Ox63] Oxtoby J.C. *On two theorems of Parthasarathy and Kakutani concerning the shift transformation* (1963) Ergodic Theory (Proc. Internat. Sympos., Tulane Univ., New Orleans, La. 1961), p 203-215 Academic Press, New York.
- [O-Pe04] Otal, Jean-Pierre ; Peigné, Marc *Principe variationnel et groupes kleinien*, Duke Math. J. **125** (2004), no. 1, 15-44.
- [P] Parry, William *Entropy and generators in ergodic theory*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam 1969 xii+124 pp.
- [Pa61] K.R. Parthasarathy. On the category of ergodic measures. *Illinois J. Math.* **5** (1961) 648–656.
- [Pa62] K.R. Parthasarathy. A note on Mixing Processes *Sankhya, The Indian journal of Statistics*, Series A, vol 24, no. 4 (nov. 1962), pp 331-332.
- [Pat76] Patterson, S. J. *The limit set of a Fuchsian group*. Acta Math. **136** no. 3-4 (1976), 241-273.
- [Ro00] Roblin, Thomas *Sur l'ergodicité rationnelle et les propriétés ergodiques du flot géodésique dans les variétés hyperboliques*, Ergodic Theory Dyn. Systems **20** no. 6 (2000), 1785-1819.
- [Ro02] Roblin, Thomas *Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative*. Ann. Inst. Fourier **52** no. 1 (2002), 145-151.
- [Ro03] Roblin, Thomas *Ergodicité et équidistribution en courbure négative* (French) [Ergodicity and uniform distribution in negative curvature], Mem. Soc. Math. Fr. **95** (2003).
- [R] Rokhlin V.A. *Lectures on the entropy theory of transformations with invariant measure*. Uspehi Mat. Nauk 22 1967 no. 5 (137). (Russian Math Surveys **22** 1967, no.5)
- [S99] Sarig, Omri, *Thermodynamical formalism for countable markov shifts* Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 6, 1565-1593.
- [S01] Sarig, Omri, *Thermodynamical formalism for null recurrent potentials* Israel J. Math. **121** (2001), 285-311.
- [S04] Sarig, Omri, *Invariant Radon measures for horocycle flows on Abelian covers*. Invent. Math. **157**, 519-551 (2004).
- [S10] Sarig, Omri *The horocycle flow and the Laplacian on hyperbolic surfaces of infinite genus*. Geom. Funct. Anal. **19** 1757-1812 (2010)
- [Sa81] Sarnak, Peter *Asymptotic behavior of periodic orbits of the horocycle flow and Einsenstein series*, Communications on Pure and Applied Mathematics **34** (1981), 719-739.
- [Schw57] Schwartzman S. , *Asymptotic cycles* Ann. of Math. (2) **66** (1957), 270–284.
- [Se1] Series Caroline : *Geometrical Markov coding of geodesics on surfaces of constant negative curvature*, Ergod. Th. & Dynam. Syst. **6**, 601—625 (1986).
- [Se2] Series Caroline *Geometrical methods of symbolic coding*, chapter 5 in : *Ergodic Theory, Symbolic Dynamics, and Hyperbolic Spaces*, edited by T. Bedford, M. Keane and C. Series. Oxford Science Publications, Oxford University Press (1991)

- [Sh94] Shah, Nimish A. *Limit distributions of polynomial trajectories on homogeneous spaces*, Duke Math. J. **75** no. 3 (1994), 711-732.
- [Si72] Sigmund, Karl *On the space of invariant measures for hyperbolic flows*, Am. J. Math. **94** (1972), 31-37.
- [Su79] Sullivan, Dennis *The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions* Publ. Math. I.H.E.S **50** (1979), 171-202.
- [Su84] Sullivan, Dennis *Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups*. Acta Math. **153** no. 3-4 (1984), 259-277.
- [W82] Walters Peter, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

Géodésiques, horocycles, et leurs mesures invariantes

Résumé :

La théorie ergodique est une branche des systèmes dynamiques dans laquelle on essaie de décrire les propriétés d'un système dynamique à travers la connaissance de ses mesures invariantes. Je m'intéresse à deux systèmes dynamiques de nature géométrique, le flot géodésique et le flot horocyclique, qui agissent sur le fibré unitaire tangent d'une surface hyperbolique S . Historiquement, l'étude du flot géodésique remonte à Hadamard (1898). C'était à l'époque un premier exemple géométrique intéressant de système dynamique présentant les propriétés chaotiques introduites peu de temps auparavant par Poincaré. Le flot horocyclique apparaît dans les travaux de Hopf et Hedlund, dans les années 1930, au moment donc de l'essor de la toute jeune théorie ergodique. Ces deux systèmes dynamiques sont étudiés comme exemples illustrant les propriétés dynamiques et ergodiques intéressantes depuis plus d'un siècle. Étonnamment, les dynamiciens n'ont pas épuisé cette étude, et ces deux systèmes dynamiques sont maintenant étudiés pour comprendre ce qui se passe sur des espaces non compacts, ou en courbure variable comme exemples de dynamique non uniformément hyperbolique, ou comme exemples en théorie ergodique en mesure infinie. Mes travaux s'insèrent tout à fait dans ce cadre, puisque l'un de leurs fils directeurs est de comprendre, parmi les propriétés ergodiques classiques de ces flots dans les situations bien connues (sur les surfaces hyperboliques compactes), quelles sont les propriétés qui sont conservées, ou pas, lorsqu'on augmente la dimension, qu'on ôte l'hypothèse de compacité ou même de volume fini, ou lorsqu'on fait varier la courbure, voire qu'on lui permet de s'annuler.

Bien qu'intimement liés par le fait que les orbites du flot horocyclique décrivent les variétés fortement instables du flot géodésique, ces deux flots possèdent des propriétés dynamiques radicalement différentes. Le flot géodésique est un flot hyperbolique, avec de fortes propriétés stochastiques : il possède une infinité d'orbites périodiques, des orbites denses, d'autres plus compliquées encore, et une infinité non dénombrable de mesures invariantes. Il est d'entropie positive, exponentiellement mélangeant, ... Comprendre l'ensemble de ses mesures invariantes est une tâche bien trop ambitieuse. Néanmoins, je me suis intéressée à deux types de propriétés, d'une part des propriétés génériques (au sens de Baire) de l'ensemble des mesures de probabilité invariantes, mais aussi les propriétés d'une famille de mesures bien spécifiques, aux propriétés dynamiques particulièrement intéressantes, les mesures de Gibbs.

Le flot horocyclique au contraire, sur une surface hyperbolique compacte, est uniquement ergodique. Cela implique des propriétés d'équidistribution de toutes ses orbites vers l'unique mesure invariante. Sur des surfaces non compactes, d'autres mesures invariantes apparaissent, mais plutôt peu (travaux de Dani, Dani-Smillie en volume fini, de Roblin pour le cas géométriquement fini, et Babillot-Ledrappier, Sarig pour des revêtements de surfaces compactes). Dans le cadre de ces travaux, on parvient tout de même à établir certaines propriétés d'équidistribution d'orbites. Dans cet esprit, je présente des résultats obtenus sur la densité de « demi-horocycles », d'autres sur l'équidistribution d'horocycles sur des revêtements abéliens de surfaces hyperboliques compactes, mais aussi un résultat sur la distribution des orbites de groupes discrets agissant linéairement sur le plan, obtenu comme corollaire de mes résultats sur l'équidistribution des horocycles.