Université de Picardie Jules Verne — **Année 2010-2011**
UFR Sciences — **Master 1 de Mathématiques**

M3-Probabilités
TD N. 6 Convergence en loi et TCL.

Exercice 1 (**Non équivalence des diverses convergences**). **1)** Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes vérifiant

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad P(X_n = 1) = \frac{1}{n}.$$

Montrer que (X_n) converge en probabilité mais ne converge pas presque sûrement.

2) Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. définies par $Y_n = Y$ avec

$$P(Y = -1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}.$$

Montrer que (Y_n) converge en loi vers $-Y$ mais ne converge pas en probabilité vers $-Y$.

3) Montrer que les convergences en loi et en probabilité sont équivalentes lorsque la limite est constante presque sûrement.

Exercice 2 (**Somme et CV en loi**). Soient X une var et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. telles que (X_n) converge en loi vers X et (Y_n) converge en loi vers 0.

1) Montrer à l'aide d'un exemple que l'on n'a pas toujours $(X_n - X)$ converge en loi vers 0.

2) Montrer que $(X_n + Y_n)$ converge en loi vers X.

Exercice 3 (**Convergence étroite pour les mesures sur** $\mathbb{N}$). **1)** On suppose que (μ_n) et μ sont des probabilités sur $\mathbb{N}$. Montrer que (μ_n) converge étroitement vers μ ssi pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mu_n(k)$ converge vers $\mu(k)$.

2) A-t-on le même résultat pour des probabilités définies sur $A = \{1/k, k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$?

Exercice 4 (**Convergence étroite pour les mesures absolument continues**). **1)** *Soit (μ_n) des probabilités de densité (f_n) par rapport à la mesure de Lebesgue convergeant étroitement vers une probabilité μ. La mesure μ admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?*

2) *Soient (μ_n) et μ des probabilités de densités (f_n) et f par rapport à la mesure de Lebesgue. Que peut-on dire si (μ_n) converge vers μ étroitement ?*

3) *Soient (μ_n) et μ des probabilités de densités (f_n) et f par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que si (f_n) converge vers f Lebesgue-presque partout alors (μ_n) converge étroitement vers μ.*

Exercice 5. Montrer que la conclusion du TCL ne s'étend jamais à la convergence en probabilité.

Exercice 6 (**Une application du TCL**). En considérant une suite de variables indépendantes suivant la loi de Poisson de paramètre 1, déduire du TCL que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$