**Université de Picardie Jules Verne** **Année 2010-2011**
**Master 1 de Mathématiques**

**M3-Probabilités**
**Corrigés - TD N. 5 Temps d'arrêt et martingale**

**Exercice 1 (Inégalité de Jensen).** Soit $\varphi$ une fonction convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
**a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \sup\{ax+b,\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},\ \text{t.q. } \forall y \in \mathbb{R},\ ay+b \leq \varphi(y)\}$.
**b)** Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. En déduire que pour toute fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(\int_X f\, d\mu) \leq \int_X \varphi(f(x))\, d\mu(x)\,.$$

**Exercice 2 (Exemples de temps d'arrêt).** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration croissante.
**a)** Rappeler la définition d'un temps d'arrêt $\tau : X \to \mathbb{N}$.
**b)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Rappelez la définition de $\sigma(X_n)$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un borélien, et soit $\tau_B = \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in B\}$ le temps d'entrée dans $B$. Montrez que $\tau_B$ est un temps d'arrêt.
**c)** Si $\tau$ est un temps d'arrêt, rappelez la définition de la tribu $\mathcal{F}_\tau$.
**d)** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r., $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle associée, et $S_n = X_1 + \ldots X_n$. Montrer que $T_{]a,b[} = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, S_n \notin ]a,b[\}$ est un temps d'arrêt.

**Exercice 3. 1)** Montrer que si $\tau = k$ est un temps d'arrêt constant, alors $\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = k\} = \mathcal{F}_k$.
**2)** Montrer que tout temps d'arrêt $\tau$ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.
**3)** Montrer que si $(X_n)$ est $\mathcal{F}_n$-adapté alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{\tau\wedge n}$ est $\mathcal{F}_\tau$ mesurable.

**Exercice 4 (Un exemple de martingale).** Soit $Z$ une v.a.r. intégrable. On pose $X_n = E(Z|\mathcal{F}_n)$.
**1)** Montrer que $(X_n)$ est une martingale.
**2)** Montrer que $X_\tau = E(Z|\mathcal{F}_\tau)$ p.s.
**3)** En déduire que si $\sigma$ est un temps d'arrêt tel que $\sigma \leq \tau < \infty$ ps, alors $E(X_\tau|\mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$ ps.

**Exercice 5 (Les processus de renouvellement).** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles positives. Soit $S_n = X_1 + \ldots X_n$ la marche aléatoire associée sur $\mathbb{R}_+$, appelée processus de renouvellement.
**a)** La suite $(S_n)$ est-elle une martingale ? Sur-martingale ? Sous-martingale ? Pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$.
**b)** On considère une machine dont une pièce tombe fréquemment en panne et doit être remplacée. Montrez que la suite des instants de remplacement de ces pièces est un processus de renouvellement.
**c)** Même question avec la suite des instants d'arrivée dans une file d'attente d'une suite de clients.

**Exercice 6 (Marche aléatoire de Bernoulli.).** 1) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes centrées telles que $|X_n| \leq C < +\infty$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que soit $P(\lim_n S_n$ existe et est finie$) = 1$ soit $P(\limsup_n S_n = +\infty \cap \liminf_n S_n = -\infty) = 1$.
2a) On suppose de plus que les v.a.r. $X_n$ ont même loi et que $P(X_n = 0) < 1$. Montrer que $P(\limsup_n S_n = +\infty \cap \liminf_n S_n = -\infty) = 1$.
2b) On suppose que $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = 1/2$. Montrer que pour tout entier $a$, $P(\limsup_n\{S_n = a\}) = 1$.
2c) Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{n : S_n > 0\}$. Montrer que $T$ est un temps d'arrêt, et qu'il est p.s. fini, i.e. $P(T < +\infty) = 1$, puis que $E(T) = +\infty$. En déduire une interprétation pour le jeu de pile ou face.

**Exercice 7 (Barrières).** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. iid de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Soit $a < 0 < b$ deux entiers. Soit $\tau_a$ le temps d'atteinte de $a$ et $\tau_b$ le temps d'atteinte de $b$, et $\tau = \tau_a \wedge \tau_b$ le minimum des deux. On note $M_0 = 0$, et $M_n = X_1 + \cdots + X_n$, pour $n \geq 1$.
**a)** Soit $A_n$ l'événement $\{X_k = 1 \quad \forall k \in [n(b-a), (n+1)(b-a)[$. Calculez $P(\limsup A_n) = 1$. Déduisez-en que $\tau < \infty$ p.s.
**b)** Montrer que $M_{\tau\wedge n}$ est une martingale bornée. Etudier sa limite éventuelle.
**c)** Montrer que $E(M_\tau) = E(M_0) = 0$.
**d)** En considérant les deux événements disjoints $\{\tau_a \leq \tau_b\}$ et $\{\tau_b < \tau_a\}$, en déduire que la probabilité d'atteindre $b$ avant $a$ vaut $\frac{b}{b-a}$.

**Exercice 8 (Franchissement de barrières (bis)).** Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\delta_0$, $p + q + r = 1$, $0 \leq p, q, r < 1$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soient $a < 0 < b$ deux réels distincts.
**a)** Soit $T = \inf\{n \geq 0,\ S_n \notin ]a,b[\}$. Montrer que $T$ est p.s. fini.
**b)** Soit $\lambda$ un réel, et $\varphi(\lambda) = pe^\lambda + qe^{-\lambda} + r$, et $Y_n = e^{\lambda S_n}\varphi(\lambda)^{-n}$. Montrer que $Y_n$ est une martingale.
**c)** Soit $\lambda$ tq $\varphi(\lambda) \geq 1$. A l'aide d'un théorème d'arrêt appliqué avec les temps d'arrêt $1 \leq T$, montrer que $E(Y_T) = 1$.
**d)** On suppose maintenant $p = q = \frac{1}{2}$ et $r = 0$. Calculer $E(S_T)$, $P(S_T = a)$, $P(S_T = b)$.

**Exercice 9 (Un contre-exemple simple aux théorèmes d'arrêt).** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$ sur $\mathbb{N}$, et $S_n$ la marche aléatoire simple définie par $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots X_n$, $n \geq 1$. Soit $\tau_1$ le temps d'atteinte de 1.
**a)** Comparer $E(S_\tau)$ et $E(S_0)$.
**b)** Montrer que $E(\tau) = +\infty$.

**Exercice 10 (Martingales $L^2$).** Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une suite de v.a.r. indépendantes centrées de carré intégrable et de variance $\sigma^2$. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \cdots, Y_n)$ la filtration associée à la suite $(Y_n)$.
Montrer que la suite $(X_n)$ définie par $X_n = (\sum_{k=0}^n Y_k)^2 - n\sigma^2$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

**Exercice 11 (Sur-martingales positives).** Supposons que $(X_n)$ est une sous-martingale. Montrer que $\sup E(X_n^+) < \infty \Leftrightarrow \sup E(|X_n|) < \infty$.
2) Soit $(Y_n)$ une surmartingale positive. Montrer que $Y_n$ converge p.s. vers une limite notée $Y_\infty$ intégrable vérifiant $E(Y_\infty|\mathcal{F}_n) \leq Y_n$.

**Exercice 12 ( Théorème de Doob faux pour des temps d'arrêt non bornés).** Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de var iid $> 0$ telle que $Y_1$ et $\ln Y_1$ soient intégrables avec $E(Y_1) = 1$ et $E(\ln Y_1) < 0$. On définit $(X_n)_{n\geq 0}$ par $X_0 = 1$ et $X_n = \Pi_{i=1}^n Y_i$ si $n \geq 1$.
**1)** Montrer que $(X_n)$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\ \Omega\}$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \cdots, Y_n)$ si $n \geq 1$.
**2)** Montrer que $(X_n)$ converge ps vers 0.
**3)** Soit $\tau$ le temps d'arrêt défini par $\tau = \inf\{n\ :\ X_n \leq 0.5\}$. Montrer que $\tau < +\infty$ ps et que $E(X_\tau) \neq E(X_0)$. Conclure.

**Exercice 13 (Décomposition de Doob.). 1)** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de var intégrable adaptée à une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ avec $X_0 = 0$. Montrer qu'il existe une unique (ps) décomposition $X_n = M_n + V_n$ avec $(M_n)$ martingale et $(V_n)$ prévisible avec $M_0 = V_0 = 0$.
**2)** Montrer que $(X_n)$ est sousmartingale ssi $(V_n)$ est croissante.

**Exercice 14 (Convergence des martingales dans $L^2$).** Soit $(X_n)$ une martingale de carré intégrable.
**1)** Montrer que $E((X_n - X_k)^2) = E(X_n^2) - E(X_k^2)$ si $n \geq k$.
**2)** En déduire que $\sup_n E(X_n^2) < +\infty$ ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} E((X_{n+1} - X_n)^2) < +\infty$ et que dans ce cas $(X_n)$ converge p.s. et dans $L^2$.