M3-Probabilités
TD N. 4 Espérance conditionnelle

Exercice 1. Soit ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilité discrètes sur X, i.e. deux mesures de la forme $\nu_1 = \sum_{i=1}^K \alpha_i \delta_{x_i}$ et $\nu_2 = \sum_{j=2}^L \beta_j \delta_{y_j}$. On suppose que ν_1 est absolument continue par rapport à ν_2. Ecrire la dérivée de Radon-Nikodym de ν_1 par rapport à ν_2.

Exercice 2. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un C^1-difféomorphisme. On définit la mesure image $f_*\lambda$ de λ comme $f_*\lambda(A) := \lambda(f^{-1}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrez que $f_*\lambda$ et λ sont équivalentes, i.e. $f_*\lambda$ est absolument continue par rapport à λ et λ est absolument continue par rapport à $f_*\lambda$. Donnez les dérivées de Radon-Nikodym correspondantes.

Exercice 3. Soient trois mesures μ, ν, σ, telles que μ est absolument continue par rapport à ν et ν est absolument continue par rapport à σ. Montrez que μ est absolument continue par rapport à σ, et exprimez sa dérivée de Radon-Nikodym en fonction des deux autres.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soit $(A_1, \ldots, A_K)$ une partition finie de Ω en ensembles deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. On note $\Sigma = \sigma(A_1, \ldots, A_K) \subset \mathcal{A}$ la tribu engendrée.
a) Décrire les éléments de Σ.
b) Soit X une variable aléatoire rélle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Que vaut son espérance conditionnelle $E(X|\Sigma)$?

Exercice 5. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $Y = 2[X/2]$ où $[.]$ désigne la partie entière. Calculer $E(X|Y)$ et $E(Y|X)$.

Exercice 6. *Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité $f_{X,Y}$. Quelle est l'espérance conditionnelle de X sachant Y, $E(X|Y)$?*

Exercice 7. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à densité. On pose $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (U, V). En déduire la densité conditionnelle de U sachant V.

Exercice 8. Soient X et Y deux var indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Z = X + Y$. Déterminer la loi du couple (X, Z). En déduire la densité conditionnelle de X sachant Z et $E(X|Z)$.

Exercice 9. Soient X et Y deux var indépendantes, de même loi ayant pour densité $f(z) = \frac{1}{z^2} 1_{]1,+\infty[}(z)$. On pose $U = XY$ et $V = X/Y$. Quelle est la loi de (U, V) ? En déduire la densité conditionnelle de V sachant U et $E(V|U)$.

Dans toute la suite, X désigne une v.a.r. intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad P(B) = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Calculer $E(X|\mathcal{B})$.

Exercice 11. On suppose que X est de carré intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{A}$. On pose

$$\mathrm{Var}(X|\mathcal{B}) = E(X^2|\mathcal{B}) - (E(X|\mathcal{B}))^2.$$

Montrer que $\mathrm{Var}(X) = E(\mathrm{Var}(X|\mathcal{B})) + \mathrm{Var}(E(X|\mathcal{B}))$.

Exercice 12. Soit X de carré intégrable. On suppose que $E(X^2|Y) = Y^2$ et $E(X|Y) = Y$. Montrer que $X = Y$ ps.

Exercice 13. Soient $X_1, \cdots, X_n$ des var indépendantes, intégrables et $\mathcal{B}$ la tribu définie par $\mathcal{B} = \sigma(X_1, \cdots, X_{n-1})$. Calculer $E(X_1 + \cdots + X_n|\mathcal{B})$ et $E(X_1 \cdots X_n|\mathcal{B})$.

Exercice 14. Soit Y une var indépendante et de même loi que X. Calculer $E(X|X + Y)$ et $E(Y|X + Y)$.