**Université de Picardie Jules Verne** **Année 2010-2011**
**Master 1 de Mathématiques**

**M3-Probabilités**
**TD N. 3 Indépendance**

**Exercice 1.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité. Soient $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$, et $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$. Étudier le lien entre l'indépendance des $(A_i)$ et l'indépendance des $X_i$.

**Exercice 2.** Le lemme de Borel Cantelli est-il vrai pour une suite de v.a. deux à deux indépendantes ?

**1.** Montrer que la seule question est de savoir si pour une suite de v.a. deux à deux indépendantes, la divergence de la série $\sum_n P(A_n) = +\infty$ implique $P(\limsup A_n) = 1$ ou non.

**2.** Soit $S_n = \sum_1^n \mathbf{1}_{A_k}$. Quel est le comportement de $E(S_n)$ quand $n \to +\infty$ ?

**3.** Montrer que $\frac{S_n}{E(S_n)}$ tend vers 1 dans $L^2$.

**4.** En déduire l'existence d'une sous-suite $n_k \to +\infty$, tq $\frac{S_{n_k}}{E(S_{n_k})} \to 1$ presque sûrement.

**5.** Conclure.

**Exercice 3.** La loi du 0-1 de Kolmogorov est-elle vraie pour des suites de v.a. deux à deux indépendantes ? On pourra considérer la suite de v.a. suivantes. Soit $(X_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\varepsilon$ des v.a. qui valent $\pm 1$ avec probabilité 1/2, indépendantes dans leur ensemble. On pose ensuite $X_{2n+1} = \varepsilon * X_{2n}$.

**1.** Montrer que les $(X_n)$ sont deux à deux indépendantes, mais pas dans leur ensemble.

**2.** Montrer que la loi du 0-1 est fausse dans le cas de variables 2 à deux indépendantes seulement.

**Exercice 4.** Soit $(A_n)$ une suite d'événements indépendants sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

**1.** Montrer que $P(\liminf A_n) \in \{0,1\}$ et $P(\limsup A_n) \in \{0,1\}$.

**2.** Donner dans chacun des cas une condition nécessaire et suffisante permettant de décider entre 0 et 1.

**3.** A-t-on $P(\liminf A_n) = P(\limsup A_n)$ ?

**Exercice 5.** **1.** Soit $X$ une var telle que $P(X \in A) \in \{0,1\}$ pour tout borélien $A$. Montrer que $X$ est constante p-s.

**2.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes définies un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ diverge p-s ou converge p-s.

**Exercice 6.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

**1.** Montrer que $\liminf Y_n$ et $\limsup Y_n$ sont constantes p-s.

**2.** En déduire que $P\left(Y_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$.

**3.** Montrer que $P\left(S_n \text{ converge dans } \mathbb{R}\right) \in \{0,1\}$.

**4.** Peut-on dire que $\liminf S_n$ est constante p-s ?

**Exercice 7.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$ et $p \neq 0,5$. On considère la marche aléatoire $Y_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec $Y_0 = 0$.

L'événement $A_n = \{Y_n = 0\}$ est dit *retour en 0*. Montrer que $P(\limsup A_n) = 0$.

**Exercice 8** (Loi des grands nombres pour les var $L^2$)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes de même loi, de carré intégrables et de moyenne $\mu$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer sans utiliser la loi forte des grands nombres pour les var $L^1$ que

**1.** $\frac{S_n}{n}$ converge en probabilité vers $\mu$.

**2.** $\frac{S_n}{n}$ converge dans $L^2$ vers $\mu$.

**3.** $\frac{S_n}{n}$ converge ps vers $\mu$.

**Exercice 9** (COndition nécessaire pour la loi des grands nombres)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes de même loi.

**1.** Montrer que $\lim_n \frac{X_n}{n} = 0$ p-s si et seulement si $X_1 \in L^1$.

**2.** On définit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En déduire que si les variables $X_n$ ne sont pas intégrables, la suite $(\frac{S_n}{n})$ ne converge pas.

**Exercice 10.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes de même loi de carré intégrables. Etudier la convergence presque-sûre de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$

**Exercice 11.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de va indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(U_k) = \int_0^1 f(x)dx.$$

**Exercice 12.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de var indépendantes de même loi de carré intégrables. On pose $m = E[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Pour $n \geq 2$, on définit les var :

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k - Y_n)^2.$$

**1.** Calculer $E[Z_n]$.
**2.** Montrer que $\lim_n Z_n = \sigma^2$ p.s.

**Exercice 13.** On considère l'espace de probabilité $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où $\lambda$ désigne la mesure de Lebesgue. Etudier $\sum_n \lambda(A_n)$ et calculer $\lambda(\limsup_n A_n)$ où $A_n = [0, 1/n]$. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 14.** On jette indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée . Quelle est la probabilité de faire une infinité de fois deux piles consécutifs ? Etudier également le cas où la pièce n'est pas équilibrée.

**Exercice 15.** On suppose qu'un singe placé devant une machine à écrire tape chaque lettre avec la même probabilité et de manière indépendante. Montrer que tôt ou tard il finira par ecrire n'importe quel poème de Verlaine. Le résultat reste-il vrai si l'on suppose que les lettres ne sont pas toutes tapées avec la même probabilité ?

**Exercice 16.** Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda$ et $(A_n)_{n\geq 0}$ les événements $E_n = \{X_n \geq \alpha \ln n\}$ où $\alpha > 0$. Calculer $P(\limsup A_n)$.

**Exercice 17.** Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes. Montrer que

$$\sup_n X_n < \infty \text{ p.s} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A > 0, \quad \sum_n P(X_n > A) < \infty.$$

**Exercice 18.** Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que la mesure de l'ensemble $n\mathbb{Z}$ des entiers divisibles par $n$ vaut $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.