Université de Picardie Jules Verne **Année 2010-2011**
Master 1 de Mathématiques

M3-Probabilités
Feuille 2 Théorème de Dynkin, Fonctions de répartitions

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positives, Lebesgue-intégrables, d'intégrales égales à 1. Supposons que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, $\int_I f\, d\lambda = \int_I g\, d\lambda$. Montrez que $f = g$ λ-p.p.

Exercice 2. Montrer qu'une intersection de λ-systèmes est un λ-système.

Exercice 3. *Soient* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *2 espaces mesurables.*

Nous étudions la mesurabilité des sections d'un ensemble de l'espace mesurable produit $(\Omega, \mathcal{A}) = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2)$ *(i.e.* $\mathcal{A}_1 \bigotimes \mathcal{A}_2$ *est la tribu engendrée par les pavés* $A_1 \times A_2$ *avec* $A_1 \in \mathcal{A}_1$ *et* $A_2 \in \mathcal{A}_2$*).*

Pour $A \in \mathcal{A}$ *et* $\omega_1 \in \Omega_1$*, définissons la section*

$$A_{\omega_1} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : (\omega_1, \omega_2) \in A\}.$$

Introduisons

$$\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} : \forall \omega_1, A_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\},$$
$$\mathcal{E} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}.$$

a) Montrer que $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie.
b) Soit $A = A_1 \times A_2$. Déterminer A_{ω_1} pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$. En déduire que $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$.
c) Montrer que $\mathcal{M}$ est un λ-système.
d) En déduire que si $A \in \mathcal{A}$, toute section A_{ω_1} est $\mathcal{A}_2$-mesurable.

On considère maintenant deux probabilités, P_1 *et* P_2*, sur* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *et* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$*.*
e) Soit $F_A : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $F_A(\omega_1) = \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_{\omega_1}}(\omega_2)\, dP_2(\omega_2) = P_2(A_{\omega_1})$. Soit

$$\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{A}, F_A \text{ est } \mathcal{A}_1 \text{ mesurable}\}.$$

Montrez que $\mathcal{N}$ contient $\mathcal{E}$, puis que $\mathcal{N}$ est un λ-système. Déduisez-en que pour tout $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, l'application $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} \mathbf{1}_{A_{\omega_1}}\, dP(\omega_2)$ est $\mathcal{A}_1$-mesurable.

f) Soit $\tilde{P}(A) := \int_{\Omega_1} F_A(\omega_1)\, dP_1(\omega_1)$. Montrez que $\tilde{P}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, qui coïncide avec $P = P_1 \otimes P_2$ sur $\mathcal{E}$. En déduire le théorème de Fubini-Tonelli.

Exercice 4. Soit $\Omega =]0,1] \times]0,1]$ et $\mathcal{F}$ la tribu constituée des ensembles de la forme $B \times]0,1]$, $B \in \mathcal{B}(]0,1])$. On définit une probabilité P sur $\mathcal{F}$ par $P(B \times]0,1]) = \lambda(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(]0,1])$. Mpntrer que $P_*(]0,1] \times \{1/2\}) = 0$ et $P^*(]0,1] \times \{1/2\}) = 1$.

Exercice 5. Soit E un ensemble à N éléments, les sommets. Une puce se déplace aléatoirement de sommet en sommet. A chaque saut, la probabilité d'aller du sommet i au sommet j est notée p_{ij}, de sorte que $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$. La matrice $P = (p_{ij})$ est appelée *matrice markovienne.* La position initiale de la puce est aléatoire. La probabilité qu'elle soit au point i est notée π_i, de sorte que $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$. On note $\Omega = \{1, \ldots, N\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les trajectoires possibles de la puce. On définit P_n sur $\{1, \ldots, N\}^n$ par $P_n((a_1, \ldots, a_n)) = \pi_{a_1} p_{a_1,a_2} \ldots p_{a_{n-1},a_n}$. Vérifier que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définit une probabilité P sur Ω muni de la tribu engendrée par les cylindres.

Exercice 6. a) Soit $(A_\beta)_{\beta \in B}$ une famille d'événements deux à deux disjoints sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que si $P(A_\beta) > 0$ pour tout $\beta \in B$, alors l'ensemble d'indices B est fini ou dénombrable.

b) Soit F la fonction de répartition d'une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Montrer que F est continue ssi $P(\{x\}) = 0$ pour tout x réel.

c) En déduire que le nombre de points de discontinuité de la fonction de répartition F d'une probabilité est fini ou dénombrable. Peut-il être infini ?

d) En déduire que F est continue sur un ensemble dense.

Exercice 7. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4} 1_{[0,\infty[}(x) + \frac{1}{2} 1_{[1,\infty[}(x) + \frac{1}{4} 1_{[2,\infty[}(x).$$

Montrer que c'est la fonction de répartition d'une probabilité P sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. Trouver la probabilité des événements suivants : $A =]-1/2, 1/2[$, $B =]-1/2, 3/2[$, $C =]2/3, 5/2[$, $D = [0, 2[$ et $E =]3, \infty[$.

Exercice 8. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 1_{[\frac{1}{i},\infty[}(x).$$

Montrer que c'est la fonction de répartition d'une probabilité P sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera. Trouver la probabilité des événements : $A = [1, \infty[$, $B = [1/10, \infty[$, $C = \{0\}$, $D = [0, 1/2[$, $E =]-\infty, 0[$ et $F =]0, \infty[$.

Exercice 9 (Escalier du diable)**. a)** Soit P une probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant une densité f. Montrer que $P(\{x\}) = 0$ pour tout x.

b) Représenter graphiquement la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{R}$ par la relation de récurrence :

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x \in [0,1] \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(F_n(3x) + F_n(3x-2)\right).$$

c) Montrer que la série de fonctions $\sum G_n$ où $G_n = F_{n+1} - F_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

d) En déduire que la suite (F_n) converge uniformément vers une fonction F croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

e) En déduire que F est la fonction de répartition d'une probabilité P sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

f) Montrer que $P(K) = 1$ où K désigne l'ensemble triadique de Cantor.

g) En déduire que la réciproque du résultat montré à la question 1. est fausse.

h) Montrer que $F' = 0$ λ-presque partout.

i) En déduire que

$$F(1) - F(0) \neq \int_{[0,1]} F'(x)\, dx.$$

Exercice 10 (Simulation)**.** La fonction RANDOM permet à l'aide d'un ordinateur de tirer des nombres aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On veut une méthode de tirage de nombres répartis aléatoirement suivant une loi de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition F.

1. Montrer que si F est continue et strictement croissante, la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ répond au problème.

2. Cas général. a) Pour $t \in]0,1[$, on pose $G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq t\}$. Montrer que G est bien définie (G est appelée fonction *pseudo inverse* de F).

2.b) Déterminer la loi de $G(U)$ et conclure.

3. a) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F_X continue. Donner la loi de $F_X(X)$ (on pourra commencer par supposer F_X strictement croissante.)

3.b) Le résultat trouvé en **3.** a) reste-t-il vrai si F_X n'est pas continue ?

Exercice 11. Soient F_1 et F_2 deux fonctions de répartition bornées sur $\mathbb{R}$. Etant donnée une fonction de répartition F, nous noterons μ_F la mesure déterminée par $\mu_F(]a,b]) = F(b) - F(a)$.

1) Pourquoi μ_F est-elle uniquement déterminée par la formule ci-dessus ?

2) Montrer que la composée $F_1 \circ F_2$ est également une fonction de répartition.

3) Supposons de plus que F_2 est continue est strictement croissante. Montrer que $\mu_{F_1} = \mu_{F_1\circ F_2} \circ F_2^{-1}$, i.e. que μ_{F_1} est l'image de $\mu_{F_1\circ F_2}$ sous F_2.

4) En déduire que pour toute fonction φ borélienne bornée, on a

$$\int \varphi\, d\mu_{F_1} = \int \varphi \circ F_2\, d\mu_{F_1\circ F_2}\,,$$

soit autrement dit (notation de Stieljes)

$$\int \varphi(y) d\mu_{F_1}(y) = \int \varphi \circ F_2(x)\, d\mu_{F_1\circ F_2}(x)\,.$$

5) Que se passe-t-il si on affaiblit les hypothèses sur F_2 ?