M3-Probabilités
TD N. 1 Espaces de probabilités

Exercice 1. *(Intersection de tribus)* **a)** Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de tribus sur l'ensemble Ω. Montrer que $\mathcal{B} = \cap_{\alpha\in A}\mathcal{F}_\alpha$ est aussi une tribu.
b) Le résultat est-il vrai si on prend une réunion de tribus ?

Exercice 2. *(Algèbre $\neq$ tribu)* Soit Ω un ensemble infini et $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω qui sont finies ou de complémentaire fini. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre mais pas une tribu.

Exercice 3. *(Ensembles et fonctions indicatrices)* Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de Ω.
a) Rappeler la définition de $\liminf_{n\to\infty} A_n$ et $\limsup_{n\to\infty} A_n$.
b) Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.
c) Montrer que $\liminf 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}$ et $\limsup 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}$.
d) En déduire que $\limsup 1_{A_n} - \liminf 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n \setminus \liminf A_n}$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de probabilité. Décrire la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par l'ensemble des v.a.r X telles que $X = 0$ presque surement.

Exercice 5. *(Question de cours)* Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω. Soit $P : \mathcal{A} \to \Omega$ une application additive telle que $P(\Omega) = 1$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) P est σ-additive.
(ii) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \downarrow \emptyset$ alors $P(A_n) \downarrow 0$.
(iii) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \downarrow A$ alors $P(A_n) \downarrow P(A)$.
(iv) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \uparrow \Omega$ alors $P(A_n) \uparrow 1$.
(v) Si $A_n \in \mathcal{A}$ et $A_n \uparrow A$ alors $P(A_n) \uparrow P(A)$.

Pour les exercices 6 à 10 nous supposons donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; les parties A, B, A_i, etc. sont toutes supposées appartenir à $\mathcal{A}$.

Exercice 6. *(Identité de Poincaré)* **a)** Montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
b) Généraliser cette formule en montrant que

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{p=1}^n \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_p\leq n} (-1)^{p-1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}).$$

c) *Application.* Un monsieur écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité p_n pour qu'au moins un destinataire recoive la lettre qui lui était destinée ? Etudier la convergence de la suite p_n.

Exercice 7. *(Lemme de Fatou)* Montrer que

$$P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n).$$

Construire un exemple où chacune des inégalités est une inégalité stricte.

Exercice 8. **a)** Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.
b) Montrer que si $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 1/3$ alors $1/12 \leq P(A \cap B) \leq 1/3$.
c) Soient X et Y deux v.a.r telles que $P(|X| > \epsilon) = a$ et $P(|Y| > \epsilon) = b$. Montrer que $P(|X + Y| > 2\epsilon) \leq a + b$.

Exercice 9. *(Indépendance)* **a)** Montrer que si A et B sont indépendants et A entraîne B alors : ou $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.
b) Montrer que si A indépendant de lui même alors $P(A) = 0$ ou 1.
c) Montrer que si $P(A) = 0$ ou 1 alors A est indépendant de tout événement.
d) La relation d'indépendance est-elle transitive ?

Exercice 10. *(Fonction d'Euler)* On choisit au hasard un des nombres entiers $1, 2, \cdots, n$, tous les choix étant équiprobables. Pour tout entier non nul $p \leq n$, on note A_p l'événement : « le nombre choisi est divible par p ».
a) Calculer $P(A_p)$ lorsque p divise n.
b) Montrer que si $p_1, \cdots, p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{p_1}, \cdots, A_{p_k}$ sont indépendants.

c) On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction ϕ définie sur $\mathbb{N}$ dont la valeur $\phi(n)$ est égale au nombre d'entiers non nuls inférieurs à n et premiers avec n. Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{p \text{ premier}, p/n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Exercice 11. *(Formule de Bayes)* Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de 99% (= probabilité que ce test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de 5% (= probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, on suppose que la fréquence de séropositivité est $1/10000$. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?

Exercice 12. *(Conditionnement)* **a)** Mon voisin a deux enfants dont une fille. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
b) Un autre voisin a deux enfants. Le plus jeune est une fille. Quelle est la probabilité que l'ainé soit une fille ?

Exercice 13. *(Indépendance)* On jette deux dés non pipés, un noir et un blanc. Soient A l'événement « le chiffre du dé noir est pair », B l'événement "le chiffre du dé blanc est impair" et C l'événement "les deux chiffres ont la même parité". Montrer que les événements A, B, C sont deux à deux indépendants mais non mutuellement indépendants.

Exercice 14. *(Transmission de l'information.)*On considère n "menteurs" $I_1, \cdots, I_n$. I_1 reçoit l'information sous la forme de 'oui' ou 'non', la transmet à I_2, ainsi de suite jusqu'à I_n, et I_n l'annonce au monde. Chacun d'eux transmet la vérité avec la probabilité $0 < p < 1$ et les transmissions sont indépendantes. Calculer la probabilité p_n pour que l'information soit fidèlement transmise. Que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?

Exercice 15. *(Loi de succession de Laplace)*On dispose de $N + 1$ urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard. Sans connaître son numéro, on tire n fois une boule, avec remise après chaque tirage.
a) Quelle est la probabilité pour que le $(n + 1)$-ième tirage donne une boule rouge sachant qu'au cours des n premiers tirages, seules des boules rouges ont été tirées ?
b) Calculer la limite de cette probabilité quand N tend vers l'infini.

Exercice 16. *(Un problème d'urnes)* Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard (chaque boule a la même probabilité d'être tirée), et une seconde boule est ensuite choisie au hasard parmi les $r + n - 1$ restantes. Trouver la probabilité pour que
a) Les deux boules soient rouges
b) La première boule soit rouge et la seconde noire

Exercice 17. *(Urne de Pólya)* Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire. Trouver la probabilité pour que
a) La seconde boule tirée soit noire [Rép. $\frac{n}{n+r}$]
b) La première boule est noire, sachant que la seconde est noire [Rép. $\frac{n+d}{n+r+d}$]