Feuille 5
Convergences de variables aléatoires, théorèmes limites

Exercice 1 (Exemples)**.** *Donner des exemples :*

* *une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a. r. qui converge en probabilité mais pas p.s.*
* *une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a. r. qui converge dans* L^p *mais pas p.s et inversement.*
* *une suite* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de v.a. r. qui converge en probabilité mais pas dans* L^p*.*
* *une suite* (X_n) *de v.a.r. qui converge en loi mais pas en probabilité.*

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, et (X_n) une suite de v.a.r . qui converge p.s. vers la v.a.r. X. Montrer que $f(X_n)$ converge p.s. vers $f(X)$. Que se passe-t-il si f n'est pas continue?
Mêmes questions en remplaçant la convergence p.s. par la convergence en probabilité et en supposant f uniformément continue.(Voir exo 5 pour le cas f continue).

Exercice 3. Soit (X_n) une suite de v.a.r. Montrez que si (X_n) converge en loi vers une v.a. constante $X = c$, alors X_n converge aussi en probabilité vers c.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de v.a.r. Montrez que si $X_n \to X$ dans L^p, alors $X_n \to X$ en probabilité.

Exercice 5. a) Montrer que $X_n \to X$ en probabilités ssi $E(\min(|X_n - X|, 1) \to 0$.
b) En déduire que si $X_n \to X$ en probabilités alors il existe une sous-suite X_{n_k} qui converge vers X p.s. puis que $X_n \to X$ en probabilités ssi de toute sous-suite X_{n_k} on peut extraire une sous-sous suite $X_{n'_k}$ qui converge vers X p.s. .
c) En déduire que si $X_n \to X$ en probabilités et f continue alors $f(X_n) \to f(X)$ en probabilités.

Exercice 6. Soit $\mu_n = \delta_{x_n}$ la masse de Dirac au point x_n. Montrez que (μ_n) converge étroitement vers une mesure μ si et seulement si μ est une masse de Dirac en un point x et $x_n \to x$.

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes convergeant ps vers X.
a) Montrer que pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $\phi_{(X,X)}(t,s) = \phi_X(s)\phi_X(t)$.
b) En déduire que X est constante ps.
c) Soit (Y_n) une suite de v.a. indépendantes de même loi. Que peut-on dire de la CV en loi et en probas de la suite de va (Y_n)?

Exercice 8. Soit X_j des v.a. i.i.d. réelles intégrables, et $Y_j = \exp X_j$. Montrer que $\left(\prod_{j=1}^n Y_j\right)^{\frac{1}{n}}$ converge p.s. vers une constante α que l'on calculera.

Exercice 9. Soit X_j des v.a. indépendantes de loi $\mathcal{N}(1,3)$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2} = \frac{1}{4} \quad \text{p.s.}$$

Exercice 10 (Méthode de Monte Carlo de calcul d'une intégrale)**. a)** Soit h une fonction continue sur $[0,1]$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. Montrez que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)$ converge p.s. vers $\int_0^1 h(x)dx$.
b) Même question si h est seulement mesurable, et telle que $\int_0^1 |h(x)|\,dx < +\infty$.
c) Si de plus $\int_0^1 |h(x)|^2\,dx < +\infty$, majorez l'"erreur". $\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i) - \int_0^1 h(x)dx\right|$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Chebychev.

Commentaire : Le résultat de cet exercice est utilisé en pratique pour le calcul numérique d'intégrales de fonctions dont on ne connait pas de primitives explicites. On tire au hasard et de manière uniforme un grand nombre N de points X_i, $1 \le i \le N$ dans $[0,1]$. Et la quantité $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n h(X_i)$ nous donne une valeur approchée de l'intégrale cherchée.Qu'en pensez-vous?

Exercice 11. *Le théorème de la limite centrale est faux pour la CV en proba.*
Soit $(X_i)_i$ une suite de v.a.r indépendantes et de même loi, telle que $E(X_1^2) < +\infty$. Montrer que $U_n \frac{\sum_{i=1}^n X_i - nE(X_1)}{\sqrt{n\mathrm{Var}(X_1)}}$ ne converge pas en probabilités. (Raisonner par l' absurde en montrant que dans ce cas $U_{2n} - U_n$ ne converge pas vers 0 en probas.)

Exercice 12. a) Soit X_j des v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$ et $S_n = \sum_{j=1}^n X_j$. Montrer que $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une v.a. Z de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

b) En déduire que

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n) \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \right) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13. *Formule de Stirling*

Soit X_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda_n = n$. On pose $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_n - n)$. Soit Z une variable de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

a. Montrer que

$$E(Z_n^+) = \int_0^{+\infty} P(Z_n \geq t)dt \to \int_0^{+\infty} P(Z \geq t)dt = E(Z^+)$$

b. En déduire la formule de Stirling

$$\frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}}{n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Exercice 14. Une urne contient 2 boules numérotées 0 et 2. On fait une suite de $n = 100$ tirages indépendants avec remise, et on note X_i le numéro de la boule tirée lors du i-ème tirage. Soit $S = \sum_{i=1}^n X_i$. Indiquer le plus petit nombre positif α que vous puissiez trouver tel que $P(|S - 100| < \alpha) \geq 0.9$, d'abord à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebythev, puis du théorème de la limite centrale.

Exercice 15. Un restaurateur a été chargé de préparer un repas pour 1200 personnes, ce repas devant comporter deux types de menus, A et B. Une longue expérience lui a montré que devant un tel choix, une personne sur trois choisit le menu 1. Le restaurateur prévoit a menus A et b menus B. Quelle valeur minimale doit il donner à a s'il veut qu'il y ait une probabilité inférieure à 10% qu'il y ait un nombre insuffisant de menus A? Même question pour les menus B?

Exercice 16. Lors du référendum pour ou contre le traité constitutionnel européen, un sondage "sortie des urnes" est effectué sur un échantillon de n personnes. On suppose que les réponses des sondés sont indépendantes, et qu'ils ne mentent pas. On ne tient compte que des suffrages exprimés.

a) L'institut de sondage annonce la victoire du "Oui" ou du "Non" suivant la réponse qui obtient le plus grand nombre de voix des personnes sondées. Quelles sont les probabilités de se tromper quand le non obtient 51% des suffrages et $n = 100$? $n = 500$? $n = 1000$? Quelle est la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de se tromper soit inférieure à 5%?

b) Sur les 40 premiers électeurs interrogés, 26 ont voté non. Est ce la peine de poursuivre le sondage?

Exercice 17. 1. Soient U_n et V_n deux suites de variables aléatoires telles que $U_n \to U$ en loi et $V_n \to v$ en probabilité, pour une variable aléatoire réelle U et une constante $v > 0$.

1.a. Montrer que pour tout $\epsilon \in]0, v[$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$-P(|V_n - v| > \epsilon) + P(U_n \leq tv - |t|\epsilon) \leq P(\frac{U_n}{V_n} \leq t) \leq P(U_n \leq tv + |t|\epsilon) + P(|V_n - v| > \epsilon)$$

1.b. En déduire que $U_n/V_n \to U/v$ en loi.

2. Soit X_j une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant une loi de densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

2.a. Expliquer que $E(|X_j|^p) < \infty$ pour tout $p > 0$ et calculer $E(X_j)$ et $E(X_j^2)$.

2.b. En utilisant 1.b montrer que

$$\sqrt{n}\, \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2}$$

converge en loi vers $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$.

Exercice 18 (Examen 2ème session juin 2005)**.** Soit X une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On définit la suite de v.a. $Y_n = \left(1 + \frac{X}{n}\right)^n$.

1. (*1 pt*) Exprimer $E(Y_n)$ comme une intégrale sur $[0, +\infty[$ par rapport à Lebesgue.
2. (*1 pt*) Vérifier que $(1 + \frac{x}{n})^n \leq \exp^x$ (*rappel :* $\ln(1+u) \leq u$ pour $u > -1$).
3. (*2 pts*) Dans le cas où $\lambda > 1$ montrer que $E(Y_n)$ converge vers une limite que l'on calculera en fonction de λ.
4. (*2 pts*) Qu'en est-il de $\lim E(Y_n)$ lorsque $0 < \lambda \leq 1$? (*indication :* Lemme de Fatou)