Feuille 4
Fonctions caractéristiques, indépendance

Fonctions caractéristiques

Exercice 1. Soit X une v.a. réelle.
a) On note $\bar{z}$ le conjugué d'un nombre complexe z. Montrer que $\overline{\varphi_X(u)} = \varphi_X(-u) = \varphi_{-X}(u)$.
b) Montrer que si φ est une fonction caractéristique alors $|\varphi|^2$ l'est aussi. (*Indication : prendre deux v.a. X et Y indépendantes de fonction caractéristique φ, et considérer $Z = X - Y$*).

Exercice 2. Soit X une v.a. réelle telle que $E(X^2) < \infty$ et $E(X) = 0$. Montrer que si $\sigma^2 := \mathrm{Var}(X)$ alors

$$\varphi_X(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + o(u^2)$$

quand $u \to 0$. [Rappelons qu'une fonction g est $o(t^\alpha)$ quand $t \to 0$ si $g(t)/t^\alpha \to 0$ quand $t \to 0$.]

Exercice 3. Les fonctions $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$ sont-elles des fonctions caractéristiques d'une certaine variable aléatoire ?

Indépendance

Exercice 4. Soient X, Y deux va réelles et y,a,b trois paramètres réels tels que $y \neq 0$, $y \neq 1$ et que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau suivant

$X \setminus Y$	y	0	1
0	1/4	a	1/4
1	1/6	b	1/6

a) Déterminer les lois respectives de X et Y.
b) Déterminer a et b de sorte que X et Y soient indépendantes.
c) On suppose que $a = 1/6$. Que vaut b ? Comment peut-on alors choisir y pour avoir $Cov(X, Y) = 0$? Les variables X et Y sont elles alors indépendantes ?

Exercice 5. On jette deux dés équilibrés. On désigne par X et Y le maximum et le minimum des points obtenus. Déterminer la loi du couple (X, Y). Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. On suppose que le nombre N d'oeufs pondus par un batracien suit une loi de Poisson de paramètre λ. De plus, on suppose que les oeufs pondus ont une évolution indépendante les uns des autres, et que chaque oeuf a une probabilité p d'arriver à éclosion. On note X le nombre d'oeufs éclos.
a) Déterminez la loi du couple aléatoire (X, N).
b) En déduire la loi de X.

Exercice 7. Soient X et Y deux v.a. indépendantes binomiales de paramètres respectifs (m, p) et (n, p). Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 8. Même question si X et Y sont deux v.a. indépendantes de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. En déduire quelle est la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = k$, $k \in \mathbb{N}$?

Exercice 9. Soient X et Y des v.a. indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec

$$P(X = i) = P(Y = i) = 2^{-i} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Trouver les probabilités des événements suivants :
a) $P(\min(X, Y) \leq i)$
b) $P(X = Y)$
c) $P(Y > X)$
d) $P(X \geq kY)$ pour un entier $k \geq 1$.

Exercice 10. Soient X et Y deux v.a. qui ne prennent chacune que deux valeurs réelles. Montrer que X et Y sont indépendantes ssi $E(XY) = E(X)E(Y)$. (*Indication : on pourra commencer par considérer le cas où X et Y prennent leurs valeurs dans* $\{0, 1\}$.)

Exercice 11. X une v.a. de loi géométrique de paramètre λ (i.e. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $P(X = n) = (1 - \lambda)\lambda^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$) et Y une v.a. indépendante de loi géométrique de paramètre μ. Soit $Z = \min(X, Y)$. Montrer que Z suit une loi géométrique et trouver son paramètre.

Exercice 12. Soit X et Y deux v.a. indépendantes de même loi $\frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$. Soit $Z = XY$. Montrer que X, Y, Z sont indépendantes deux à deux, mais qu'elles ne sont pas globalement indépendantes.

Exercice 13. Un sauteur en hauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \dots n$. S'il réussit son saut, il passe à la hauteur suivante, sinon il s'arrête. On suppose que les sauts sont indépendants entre eux, et que la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$. On note X la va à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ représentant le dernier saut effectué (où le sauteur échoue donc).
a) Quelle est la loi de probabilité de X ? Vérifier par un calcul qu'on a bien $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$.
b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 14. Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $P(X + Y = \alpha) = 1$, où α est une constante. Montrer que X et Y sont p.s des constantes (Indication : étudier la fonction de répartition de X). Le résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus X et Y indépendantes ?

Exercice 15. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité conjointe $f(x, y) = e^{-(x+y)}$ si $x, y \geq 0$ et 0 sinon.
a) Déterminer les densités marginales de X et Y.
b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 16. Mêmes questions que ci-dessus si $f(x, y) = 2e^{-(x+y)}$ quand $0 \leq x \leq y$ et 0 sinon.

Exercice 17. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de M_n. Montrer que M_n admet une densité que l'on déterminera.

Exercice 18. Soient X et Y des v.a. réelles définies sur l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}, m)$, où m est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens, par

$$X = 1_{[0,1/2]} - 1_{[1/2,1]}, \quad Y = 1_{[0,1/4]} - 1_{[1/4,2/4]} + 1_{[2/4,3/4]} - 1_{[3/4,1]}.$$

a) Calculer les fonctions caractéristiques des v.a. X et Y.
b) Calculer la fonction caractéristique de la v.a. à valeur vectorielle $Z = (X, Y)$. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 19. Soient U et V deux v.a. indépendantes uniformes sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
a) Calculer la densité de $U + V$. Sa loi est appelée *loi triangulaire*. Pourquoi ?
b) Calculer la fonction caractéristique φ_{U+V}.

Exercice 20. Montrer que si X et Y sont des v.a. indépendantes et de même loi, alors $Z = X - Y$ a une loi symétrique (i.e. Z et $-Z$ ont même loi).

Exercice 21. Soient X et Y des v.a. normales centrées réduites indépendantes. Montrez que les v.a. $X + Y$ et $X - Y$ sont alors indépendantes.

Borel Cantelli

Exercice 22. On considère l'espace de probabilité $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Etudier $\sum_n \lambda(A_n)$ et calculer $\lambda(\limsup_n A_n)$ où $A_n = [0, 1/n]$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 23. On jette indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée . Quelle est la probabilité de faire une infinité de fois deux piles consécutifs ? Etudier également le cas où la pièce n'est pas équilibrée.

Exercice 24. On suppose qu'un singe placé devant une machine à écrire tape chaque lettre avec la même probabilité et de manière indépendante. Montrer que tôt ou tard il finira par ecrire n'importe quel poème de Verlaine. Le résultat reste-il vrai si l'on suppose que les lettres ne sont pas toutes tapées avec la même probabilité ?

Exercice 25. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ et $(A_n)_{n\geq 0}$ les événements $E_n = \{X_n \geq \alpha \ln n\}$ où $\alpha > 0$. Calculer $P(\limsup A_n)$.

Exercice 26. Soient $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va indépendantes. Montrer que

$$\sup_n X_n < \infty \text{ p.s} \quad \Leftrightarrow \quad \exists A > 0, \quad \sum_n P(X_n > A) < \infty.$$

Exercice 27. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que la mesure des entiers divisibles par n vaut $1/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.