Feuille 3 -
Lois classiques, espérance, Variance, densités, changement de variables

Espérance, variance, lois classiques

Exercice 1. Pour chacune des lois classiques (discrètes/à densité) vues en cours, calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ suivant cette loi.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire à valeurs entières, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X = n) > 0$. Montrer que si $\lambda > 0$, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ ssi pour tout $n \geq 1$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$.

Exercice 3. Soit X une v.a. de moyenne μ et de variance σ^2 finies. Montrer que $P(\mu - d\sigma < X < \mu + d\sigma) \geq 1 - \dfrac{1}{d^2}$.
(Noter que cette inégalité n'a d'intérêt que si $d > 1$.)

Exercice 4 (partiel 2005)**.** Soit X une variable de loi géométrique de paramètre μ, $0 < \mu < 1$, i.e. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $P(X = n) = (1-\mu)\mu^n$ pour $n \geq 0$.

a) On définit pour $x \in]-1, 1[$ la série $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Montrez que $f(x) = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

b) Calculez l'espérance $E(\frac{1}{1+X})$.

Exercice 5. Soit X une v.a. à valeurs entières. Montrez que $E(X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$.

Soit Y une v.a. réelle positive. Montrez que $E(Y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} P(Y > t)\, dt$.

Fonctions de répartition et densités

Exercice 6. On suppose que la durée de vie d'un individu est une va T dont la densité est $f(t) = kt(100-t)$ si $0 \leq t \leq 100$, et 0 sinon.
a) Déterminer k, puis calculer l'espérance $E(T)$.
b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu meure après 80 ans ?
c) Même question sachant que l'individu a atteint l'âge de 50 ans.

Exercice 7. Un appareil comporte 6 lampes toutes nécessaires à son fonctionnement. La durée de vie d'une lampe est une va de densité $t \mapsto f(t) = k\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)e^{-t/4}$ (l'unité de temps est l'année).
a) Calculer k pour que f soit effectivement la densité de probabilité d'une variable aléatoire positive X.
b) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $Var(X)$.

Exercice 8 (examen juin 2005)**.** *Intensité d'une v.a. continue* Soit X une v.a.r. telle que $\mathbf{P}(X \geq t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On définit *l'intensité* de X par la limite, si elle existe,

$$h_X(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\epsilon} P(t \leq X \leq t + \epsilon | X \geq t) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Exprimer h_X grâce à la fonction de répartition F_X de la v.a. X.
b) On suppose que X est une v.a. dont la loi a pour densité une fonction continue f_X. Donner l'expression de $h_X(t)$ en fonction de $f_X(t)$ et $F_X(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$.
c) Calculer l'intensité $h(t)$ en $t > 0$ d'une v.a. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (densité $\lambda e^{-\lambda x} 1_{[0,\infty[}(x)$) et d'une v.a. de Cauchy (densité $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$).

Lois images et changement de variables

Exercice 9. Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$. Trouver la densité de $Y = X^k$ pour k entier ≥ 1.

Exercice 10. Soit X une v.a. de loi normale centrée réduite. Calculer la loi de $Y = X^2$.

Exercice 11. Soit X une v.a. de fonction de répartition F_X. Quelle est la fonction de répartition de $Y = |X|$? Quand X admet une densité f_X, montrer que Y admet aussi une densité f_Y qui s'exprime en fonction de f_X.
(*Indication :* on cherchera f_Y telle que $F_Y(t) = \int_{-\infty}^{t} f_Y(y)dy$).

Exercice 12. Soit X une v.a. de densité f_X, et soit $Y = \frac{a}{X}$ avec $a \neq 0$. Trouver la densité f_Y de Y en fonction de f_X.

Exercice 13. Soit X une v.a. uniforme sur $]-\pi, \pi[$, et $Y = \sin(X)$. Montrer que Y admet la densité $f_Y(y) = \frac{2}{2\pi\sqrt{1-y^2}} 1_{[-1,1]}(y)$.

Exercice 14 (Simulation d'une variable aléatoire exponentielle)**.** Soit $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Soit P la probabilité uniforme sur $]0,1[$ et $X(\omega) = -\frac{1}{\lambda}\log\omega$. Montrer que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Exercice 15. Soit (X,Y) une v.a. à valeur dans $\mathbb{R}^2$, de densité $f_{(X,Y)}$.
a) Trouver la densité du couple $(Z,W) = (X+Y,Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.
b) Trouver la densité de $Z = X+Y$.
c) En déduire la densité de Z si X et Y sont indépendants de même loi : la loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 16. Soit (X,Y) un couple de var de densité $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}\mathbf{1}_{\{x>1,\, y>1\}}(x,y)$.
a) Calculer les densités marginales de X et Y.
b) Calculer la densité du couple $(U,V) = (XY, \frac{X}{Y})$, puis les densités marginales de U et V.

Exercice 17. Soit (X,Y,Z) une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ de densité $(x,y,z) \mapsto \frac{K}{(1+x.y+z)^4}\mathbf{1}_{\{x>0,\, y>0,\, z>0\}}$.
a) Calculer K.
b) Donner la loi de $X+Y+Z$.

Exercice 18.

Exercice 19. On considère une machine automatique à lancer des balles de tennis à un joueur s'entraînant seul. Elle lance des balles à vitesse 1, selon un angle $\alpha \simeq \pi/4$ avec l'horizontale. La machine à lancer ayant déjà beaucoup servi, elle possède un jeu vertical que l'on modélise en supposant que l'angle de tir au lieu d'être constant égal à a est une variable aléatoire $A = A(\omega)$ de loi uniforme sur l'intervalle $[\frac{\pi}{4} - \epsilon, \frac{\pi}{4} + \epsilon]$, $0 < \epsilon < \pi/4$. Soit $T(\omega)$ le temps nécessaire pour que la balle atteigne le sol, et $D(\omega)$ sa distance à la machine à cet instant.
a) Supposons ici A constante égale à α. À l'aide de la loi fondamentale de la dynamique, montrer que la trajectoire est donnée par $t \geq 0 \mapsto (x(t) = t\cos\alpha, y(t) = \frac{-gt^2}{2} + t\sin\alpha)$. En déduire le temps que met la balle à atterrir, et la distance au sol parcourue.
b) On revient au cas où A est une v.a. de loi uniforme sur $[\frac{\pi}{4} - \epsilon, \frac{\pi}{4} + \epsilon]$. Exprimer les variables aléatoires T et D en fonction de la variable aléatoire A.
c) Calculer les lois des variables T et D (*On donnera l'expression de leur densité. Attention,* $x \mapsto \sin(2x)$ *n'est pas bijective pour* x *proche de* $\pi/4$).

Exercice 20 (Loi Gamma)**.** On appelle loi Gamma $\mathcal{G}(a,\lambda)$ de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi de densité

$$h_{a,\lambda}(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{\Gamma(a)}\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}.$$

a) Reconnaître cette loi lorsque $a = 1$.
b) Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.
c) Soit Z une va de loi $\mathcal{G}(a,1)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $X = Z/\lambda$?
d) Calculez la moyenne et la variance de Z et de $\mathcal{G}(a,\lambda)$.