Université de Picardie Jules Verne **Année 2008-2009**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Feuille 2
Variables aléatoires, lois de probabilité, fonctions de répartition.

Exercice 1 (Tribu engendrée par une variable aléatoire)**. 1.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une v.a.r. Montrer que $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une tribu incluse dans $\mathcal{A}$, appelée la *tribu engendrée par* X.
2. Soit $A \in \mathcal{A}$. Quelle est la tribu engendrée par 1_A ?

Exercice 2. On considère l'espace de probabilités $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P)$ où $P = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_1$.
1. Vérifier que P est une probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $X : \omega \mapsto |\omega|$ est une variable aléatoire et déterminer sa loi.
3. Donner la fonction de répartition F_X de X et tracer son graphe.

Exercice 3. Soit X une v.a. de loi binomiale $\mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$. Autrement dit $\mathbf{P}_X(k) = C_3^k \frac{1}{4^k} \left(\frac{3}{4}\right)^{3-k}$ si $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. Tracer le graphe de F_X.

Exercice 4. Soit X une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, i.e. $\mathbf{P}_X(n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Si $\lambda = 1$ tracer le graphe de F_X.

Exercice 5. On jette deux dés équilibrés. On désigne par X et Y le maximum et le minimum des points obtenus. Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de X et la loi de Y.

Exercice 6. On lance un dé à 6 faces. On note X le résultat. On lance alors un dé à X faces. On note Y le résultat.
a) Quelle est la loi du couple (X, Y) ?
b) En déduire la loi de X et la loi de Y.

Exercice 7. Soit $(\Omega = \{0, 1, 2\}^2, \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace de probabilités et $Z = (X, Y)$ la variable définie sur cet espace ayant pour loi

$$P_Z = \frac{1}{9}\delta_{(0,0)} + \frac{1}{9}\delta_{(0,1)} + \frac{1}{9}\delta_{(0,2)} + \frac{2}{9}\delta_{(1,0)} + \frac{1}{9}\delta_{(1,2)} + \frac{2}{9}\delta_{(2,1)} + \frac{1}{9}\delta_{(2,2)}.$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y ont même loi mais que les couples (X, Y) et (Y, X) n'ont pas la même loi.

Exercice 8. 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Montrer que $X = \mathbf{1}_{[0,2/3]}$ et $Y = \mathbf{1}_{[1/4,7/12]} + \mathbf{1}_{]2/3,1[}$ sont des variables aléatoires. Déterminer leurs lois et leurs fonctions de répartition.
2. Soit $(\Omega', \mathcal{A}', P') = (\{1, \ldots, 6\}, \mathcal{P}(\{1, \ldots, 6\}), P')$ où P' désigne la mesure d'équiprobabilité sur Ω'.
On définit $Z : \Omega' \to \{0, 1\}$ par $Z(\omega') = 1$ si ω' n'est pas divisible par trois. Montrer que Z a la même loi que X et Y alors qu'elle n'est pas définie sur le même espace !

Exercice 9. Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on pose $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{\pi}\int_A \frac{1}{1+x^2}dx$. Vérifier que $\mathbf{P}$ est une une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 10. Soit $a > 0$ et $\mathbf{P}$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ par $\mathbf{P}(A) = \int_A ae^{-ax}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx$.
1. Vérifier que $\mathbf{P}$ est une probabilité.
2. Si $a = 1$ tracer le graphe de F_X.
3. Montrer que si $y > 0$, $\mathbf{P}(X > x + y | X > y) = \mathbf{P}(X > x)$.

Exercice 11. Soit X la variable aléatoire réelle définie sur $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ par $X(\omega) = 2\omega + 1$. Déterminer sa loi $\mathbf{P}_X$.

Exercice 12. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P) = ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Soit $y \in [0, 1]$. Quelle est la probabilité pour que le polynôme $p(x) = x^2 + x + y$ ait au moins une racine complexe non réelle ? Ait deux racines distinctes ? Deux racines réelles distinctes ?

Exercice 13 (Simulation)**.** La fonction RANDOM permet à l'aide d'un ordinateur de tirer des nombres aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On veut une méthode de tirage de nombres répartis aléatoirement suivant une loi de probabilité μ sur $\mathbb{R}$ de fonction de répartition F.
1.a. Montrer que si F est continue et strictement croissante, la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ répond au problème.
2. Cas général. a) Pour $t \in]0,1[$, on pose $G(t) = \inf\{x \in \mathbb{R},\ F(x) \geq t\}$. Montrer que G est bien définie (G est appelée fonction *pseudo inverse* de F).
b)Déterminer la loi de $G(U)$ et conclure.
3. a) Soit X une v.a.r. de fonction de répartition F_X continue. Donner la loi de $F_X(X)$ (on pourra commencer par supposer F_X strictement croissante.)
b) Le résultat trouvé en **3.** a) reste-t-il vrai si F_X n'est pas continue ?

Exercice 14. Soit F la fonction donnée par

$$F(x) = \frac{1}{4}1_{[0,\infty[}(x) + \frac{1}{2}1_{[1,\infty[}(x) + \frac{1}{4}1_{[2,\infty[}(x).$$

1. Tracer le graphe de F. Montrer qu'il existe une probabilité P admettant F pour fonction de répartition. Décrire P explicitement.
2. Trouver la probabilité des événements suivants : $A =]-1/2, 1/2[$, $B =]-1/2, 3/2[$, $C =]2/3, 5/2[$, $D = [0,2[$, $E =]3,\infty[$.

Exercice 15. Soit F la fonction donnée par

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} 1_{[\frac{1}{i},\infty[}(x).$$

1. Montrer que c'est la fonction de répartition d'une probabilité P sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.
2. Trouver la probabilité des événements suivants : $A = [1,\infty[$, $B = [1/10,\infty[$, $C = \{0\}$, $D = [0,1/2[$, $E =]-\infty,0[$, $F =]0,\infty[$, $G =]1,+\infty[$, et $H = [\frac{1}{5},1]$.

Exercice 16. 1. Soit $(A_\beta)_{\beta\in B}$ une famille d'événements deux à deux disjoints sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Montrer que si $P(A_\beta) > 0$ pour tout $\beta \in B$, alors l'ensemble d'indices B est fini ou dénombrable.
2. Soit F la fonction de répartition d'une probabilité sur $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Montrer que F est continue ssi $P(\{x\}) = 0$ pour tout x réel.
3. En déduire que le nombre de points de discontinuité de la fonction de répartition F d'une probabilité est fini ou dénombrable. Peut-il être infini ?
4. En déduire que F est continue sur un ensemble dense.