Feuille 1
Probabilités élémentaires, rappels de théorie de la mesure.

Tribus, ensembles mesurables, mesures de probabilité

Exercice 1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de Ω. Montrer que $(\cup_{i\in I}A_i)^c = \cap_{i\in I}A_i^c$ et $(\cap_{i\in I}A_i)^c = \cup_{i\in I}A_i^c$.

Exercice 2. *Dans chacun des exemples suivants, calculez les ensembles suivants :* $\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n$, $\limsup_{n\to\infty} A_n$, $\liminf_{n\to\infty} A_n$ *et quand la limite existe,* $\lim_{n\to\infty} A_n$.

- $A_n = [0, \frac{1}{n+1}]$
- $A_n = \{0, (2 + (-1)^n)\}$
- $A_n = [x, y - \frac{1}{n}]$, $n \geq 1$
- $A_n = [x, y - \frac{1}{n}[$ $n \geq 1$
- $A_n = [x + \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $A_n =]x - \frac{1}{n}, y]$ $n \geq 1$
- $A_n = B(O, \frac{1}{n+1}) \subset \mathbb{R}^2$
- $A_n = n\mathbb{Z}$

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de parties de Ω. Montrer que
(a) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$
(b) $\limsup((A_n)^c) = (\liminf A_n)^c$
(c) $\liminf 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}$, $\limsup 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}$ et $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subset \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$
(d) $\mathbf{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n)$
(e) Donner un exemple dans lequel toutes les inégalités ci-dessus sont strictes.

Exercice 4. Soit $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille quelconque de tribus sur l'ensemble Ω. Montrer que $\mathcal{B} = \cap_\alpha \mathcal{F}_\alpha$ est aussi une tribu. Montrer que c'est faux pour une union de tribus.

Pour les exercices 5 à 14 nous supposons donné un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *; les parties* A, B, A_i, *etc. sont toutes supposées appartenir à* $\mathcal{A}$.

Exercice 5. Montrer que $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$.

Exercice 6. Montrer que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exercice 7. Montrer que $|P(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)| \leq \frac{1}{4}$

Exercice 8 (Identité de Poincaré)**.** Montrer que

$$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{p=1}^n \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_p} (-1)^{p+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_p}).$$

(l'exercice 6 correspond au cas particulier $n = 2$)

Application. Un monsieur écrit n lettres différentes à n personnes distinctes et ferme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, qu'il inscrit ensuite au hasard. Quelle est la probabilité p_n pour qu'au moins un destinataire recoive la lettre qui lui était destinée ? Etudier la convergence de la suite p_n.

Exercice 9. Montrer que si $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 1/3$ alors $1/12 \leq P(A \cap B) \leq 1/3$.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note $a = \mathbf{P}(|X| > \varepsilon)$ et $b = \mathbf{P}(|Y| > \varepsilon)$. Montrer que $\mathbf{P}(|X + Y| > 2\varepsilon) \leq a + b$

Exercice 11 (Sous-additivité)**.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i)$ et $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \leq \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$.

Exercice 12. Montrer que si A et B sont disjoints alors ils ne sont pas indépendants, sauf si $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Exercice 13. Si $0 < P(B) < 1$, montrer que $P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$.

Exercice 14. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que si X est bornée, alors elle est $\mathbf{P}$-intégrable . Commentaire ?

Rappels de probabilités élémentaires (S4)

Les exercices de ce paragraphe ne seront pas forcément traités en TD. Pourtant, il est indispensable de savoir faire ce type d'exercices pour passer le CAPES, et/ou pour avoir une bonne compréhension des probabilités élémentaires (i.e. là où on n'a pas encore besoin de l'outil qu'est la théorie de la mesure).

Exercice 15. Chaque don de sang est soumis à un test du SIDA. On suppose que ce test a une efficacité de 99% (= probabilité que ce test soit positif pour une personne atteinte du SIDA), et une probabilité de fausse alarme de 5% (= probabilité que le test soit positif pour une personne non atteinte). Enfin, on suppose que la fréquence de séropositivité est 1/10000. Quelle est la probabilité pour qu'une personne obtenant un test positif soit atteinte du SIDA ?

Exercice 16. On modélise le jet d'une pièce avec deux résultats possibles, $p =$ Pile et $f =$ Face, chacun avec la probabilité 1/2. On jette deux fois cette pièce, de sorte que l'ensemble des résultats possibles Ω contient les quatres points : pp, pf, fp, ff. On suppose que les deux jets sont indépendants.
a) Quelle est la probabilité pour obtenir deux fois Face, sachant que le premier jet donne Face ?
b) Quelle est la probabilité pour obtenir deux fois Face, sachant que l'un des deux jets au moins donne Face ?

Exercice 17. Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard (chaque boule a la même probabilité d'être tirée), et une seconde boule est ensuite choisie au hasard parmi les $r + n - 1$ restantes. Trouver la probabilité pour que
a) Les deux boules soient rouges
b) La première boule soit rouge et la seconde noire

Exercice 18 (Urne de Pólya)**.** Une urne contient r boules rouges et n boules noires. Une boule est choisie au hasard, on note sa couleur, et on la remet avec d boules supplémentaires de la même couleur. Puis on recommence la même procédure aussi souvent que nécessaire. Trouver la probabilité pour que
a) La seconde boule tirée soit noire [Rép. $\frac{n}{n+r}$]
b) La première boule est noire, sachant que la seconde est noire [Rép. $\frac{n+d}{n+r+d}$]

Exercice 19. *Soit X binomiale $B(p, n)$. Quelle valeur de j maximise l'expression $P(X = j)$? (Indication : Calculer $P(X = k)/P(X = k - 1)$) [Rép. $[(n + 1)p]$].*