Université de Picardie Jules Verne **Année 2005-2006**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Partiel de Probabilités - 10 mai 2006

Recommandations :
LIRE le sujet en entier avant de commencer.
NE PAS RECOPIER les énoncés.
Soigner la REDACTION, expliquer votre raisonnement, ne pas écrire des phrases qui n'ont pas de sens.
Essayer de ne pas sortir en avance, se relire, chercher.
Le BARÊME est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (2 points). À la fin du semestre, 70% des étudiants assidus en cours obtiennent leur semestre, alors que 10% des étudiants non assidus obtiennent leur semestre. On estime que 70% des étudiants sont assidus. Quelle proportion y a-t-il d'étudiants non assidus parmi ceux qui ont obtenu leur semestre ? (On construira un modèle probabiliste, et on précisera les événements considérés.)

Exercice 2 (2 points). Une famille a deux enfants (pas des jumeaux). Quelle est la probabilité pour que ce soient un garçon et une fille sachant que le premier est un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon ? (On construira un modèle probabiliste, et on précisera les événements considérés.)

Exercice 3 (2 points). On choisit un point M au hasard dans un segment $[AB]$ de longueur 1. Quelle est la probabilité pour que le produit de distances $AM.MB$ soit supérieur à $\alpha = \frac{5}{36}$? Expliquer votre modélisation du problème.

Exercice 4. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Le *produit de convolution $\mu * \nu$ des deux mesures* est défini de la manière suivante : pour tout borélien $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x+y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \,.$$

a) (3 points) $*$ Rappeler la définition d'une mesure de probabilité.
$*$ Vérifier que $\mu * \nu$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.
$*$ Vérifier que $\mu * \nu = \nu * \mu$.

b) (2 points) Supposons que μ a pour densité f_μ, et ν a pour densité f_ν.
$*$ Rappeler la définition de la densité d'une mesure.
$*$ Montrer que $\mu * \nu$ a pour densité la fonction $f_\mu * f_\nu$ *produit de convolution de f_μ et f_ν* définie par

$$f_\mu * f_\nu(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\mu(z-t) f_\nu(t) dt \,.$$

c) (2 points) Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives P_X et P_Y, à densités respectives f_X et f_Y. Quelle est la loi du couple $W = (X+Y, Y)$? En déduire celle de $Z = X+Y$. On précisera leurs densités si ces variables aléatoires sont à densit'e.

Exercice 5. On dispose d'un lot d'ampoules électriques identiques. On modélise la durée de vie (en heures) d'une ampoule par une variable aléatoire T de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

a) (1 point) Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre λ (donner sa densité).

b) (1,5 point) Calculer l'espérance $E(T)$ de T, sa variance $Var(T)$ et son écart-type $\sigma(T)$.

c) (0,5 point) Soit $t_0 > 0$ fixé. Quelle est la probabilité qu'une ampoule s'éteigne au bout d'un temps au plus égal à t_0 ?

d) (1,5 point) On branche cinq ampoules identiques simultanément à l'instant $t = 0$. On note $T_1, \dots T_5$ leurs durées de vie respectives, qu'on suppose indépendantes. Quelle est la probabilité qu'à un instant $t_0 > 0$ donné,
(i) toutes les ampoules fonctionnent encore ?
(ii) aucune ampoule ne fonctionne ?
(iii) Au moins une ampoule fonctionne encore ?

e) (1 point) On branche une première ampoule à l'instant $t = 0$. On note T_1 la variable aléatoire modélisant sa durée de vie. Dès qu'elle s'éteint, on la remplace immédiatement par une ampoule neuve (on néglige le temps de remplacement), et on note T_2 la durée de vie de la deuxième ampoule. Quelle est l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T représentant la durée d'éclairage à l'aide de deux ampoules ? Quelle est sa densité ?

f) (0,5 point) Quelle est la durée de vie moyenne de $n \geq 2$ ampoules allumées successivement ?

g) (1 point) Soit θ un instant fixé. On allume une ampoule A_1 de durée de vie T_1 à l'instant $t = 0$. Quand elle tombe en panne, on la remplace par une nouvelle ampoule A_2 de durée de vie T_2. De même, quand la deuxième tombe en panne, on la remplace par une ampoule A_3 de durée de vie T_3, et ainsi de suite. On note N la variable aléatoire modélisant le nombre d'ampoules utilisées jusqu'a l'instant θ.
(i) Quelle est la probabilité que l'ampoule A_1 soit allumée à l'instant θ ?
(ii) Exprimer la probabilité $P(N = k)$ à l'aide des variables aléatoires $T_1, T_2, \dots T_k$.