Université de Picardie Jules Verne | **Année 2008-2009**
Licence de Mathématiques L3 | **Probabilités**

Partiel - 18 Mars 2009

La précision et la rigueur de la rédaction seront déterminantes pour la correction de cette épreuve.
Vous pouvez utiliser des résultats de questions intermédiaires que vous ne savez pas démontrer, mais vous devrez dans ce cas préciser clairement ce qui est admis.
Le barême est seulement indicatif, et pourra être modifié.

Question de cours (3 points)
Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne.
1. Rappeler ce qu'est la densité de X, lorsqu'elle existe.
2. Démontrer le résultat du cours suivant : X admet la fonction mesurable positive f pour densité si et seulement si pour toute fonction mesurable bornée h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) d\mathbf{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx\,.$$

Exercice 1. (2 points)
Un représentant de commerce vendant des panneaux solaires visite un nombre aléatoire N de clients chaque jour. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité qu'un client visité achète un panneau solaire est $p \in]0,1[$, et est indépendante des décisions des autres clients. Soit Y le nombre de panneaux solaires vendus en une journée.
1. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$ la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = k | N = n)$, i.e. la probabilité que parmi n clients visités, k clients exactement achètent un panneau solaire.
2. En déduire la loi de Y, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$ calculer la probabilité $\mathbf{P}(Y = k)$. Reconnaître cette loi.
3. Calculer $\mathbf{P}(N = n | Y = k)$. En déduire que la loi conditionnelle de $T := N - k$ sachant que $Y = k$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Exercice 2. (2 points)
Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F_X et de densité f_X *continue*. Montrer que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité, et donner sa fonction de répartition et sa densité, par la méthode de votre choix.

Exercice 3. (3 points)
1. À quelle(s) condition(s) une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle la fonction de répartition d'une loi de probabilité ?

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \mathbf{1}_{[2k,+\infty[}(x)$.
2. À quelle(s) condition(s) sur C la fonction F est-elle la fonction de répartition d'une

loi de probabilité sur $\mathbb{R}$?
3. Lorsque cette condition est réalisée, explicitez cette mesure de probabilité.
4. Calculer la probabilité des ensembles $\{0\}$, $[2,8]$, $[0,2[$, $[3,+\infty[$, $]4,9[$, $]-2,-1]$.

Exercice 4. (10 points) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, de lois notées $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$ sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et de densités respectives f_X et f_Y. On note $Z=(X,Y)$ le couple (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Le couple $Z=(X,Y)$ est dit *à densité*, s'il existe une fonction mesurable positive $f_Z:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}_+$, telle que pour tout borélien $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, on ait

$$\mathbf{P}((X,Y)\in A)=\int_A f_Z(x,y)dxdy\,.$$

On pourra admettre des résultats de questions intermédiaires pour continuer l'exercice, à condition de le mentionner clairement.

1. On suppose que X et Y sont *indépendantes*, c'est-à-dire *par définition* que pour tous boréliens A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{P}(X\in A \text{ et } Y\in B)=\mathbf{P}(X\in A)\mathbf{P}(Y\in B)\,,\ \text{soit encore}$$
$$\mathbf{P}_{(X,Y)}(A\times B)=\mathbf{P}_X(A)\mathbf{P}_Y(B)\,.$$

1.a. Vérifier qu'alors la loi $\mathbf{P}_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est la loi produit $\mathbf{P}_X\otimes\mathbf{P}_Y$.
1.b. Montrer que le couple (X,Y) a pour densité la fonction

$$f:(x,y)\mapsto f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)\,.$$

2. Réciproquement, on suppose maintenant que le couple (X,Y) a pour densité $f:(x,y)\mapsto f_X(x)f_Y(y)$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

3. On suppose toujours que X et Y sont indépendantes. On suppose aussi que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=\frac{1}{2}$ et que Y suit une loi uniforme sur $]0,2\pi[$.
3.a. Donner la *densité*, la *fonction de répartition*, la *fonction caractéristique*, l'*espérance* et la *variance* des variables aléatoires X et Y.
3.b. Calculer la densité du couple (X,Y).
3.c. Soient $U=\sqrt{X}\sin Y$ et $V=\sqrt{X}\cos Y$. Calculer la densité du couple (U,V), en justifiant son existence.
3.d. Calculer les densités marginales de U et V.
3.e. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?