Université de Picardie Jules Verne **Année 2006-2007**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Partiel de Probabilités - 27 mars 2007

Recommandations :
LIRE le sujet en entier avant de commencer.
NE PAS RECOPIER les énoncés.
Soigner la REDACTION, expliquer votre raisonnement, ne pas écrire des phrases qui n'ont pas de sens.
Ne pas sortir en avance, se relire, chercher.
Le BARÊME est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (**Question de cours, 3 points**). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire.
a) Donner la définition de la fonction de répartition de X.
b) Donner la définition de " la variable aléatoire X est à densité ".
c) Donner la définition de la fonction caractéristique de X.

Exercice 2 (**Probabilités élémentaires, 2 points**). Parmi les élèves ayant obtenu leur Bac S en Francie en 2134, la proportion de garçons poursuivant des études universitaires est de 99%, alors que la proportion de filles poursuivant des études universitaires n'est que de 80%. Par ailleurs, il y a 40% de filles parmi ces élèves ayant obtenu leur Bac S. Quelle est la proportion de filles parmi les nouveaux étudiants ?

Exercice 3 (**Loi Gamma, 11 points**). Les trois parties de cet exercice sont indépendantes. On admettra au besoin les résultats des questions 1a, 1b, 1c. On appelle loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi de densité

$$h_{a,\lambda}(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}.$$

1) Étude de la fonction Γ (3 pts) On définit $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$.
a) Vérifier que si $a > 0$, Γ est bien définie, puis vérifier que si $a > 0$ et $\lambda = 1$, la fonction $h_{a,1}$ est une densité de probabilité.
b) Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.
c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$ (avec la convention $0! = 1$).
d) Calculer $\Gamma(1/2)$.

2) Étude de la loi $\mathcal{G}(a, \lambda)$ (4,5 points)
a) Reconnaître cette loi lorsque $a = 1$.
b) Soit Z une va de loi $\mathcal{G}(a, 1)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $X = Z/\lambda$?
c) Calculez l'espérance et la variance de Z et de $\mathcal{G}(a, \lambda)$.

3) (3,5 points) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(b, \lambda)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
a) Quelle est la loi du couple (X, Y) ? (On précisera sa densité s'il en a une.)
b) Quelle est la loi du couple $(X + Y, Y)$?
c) En déduire la loi de $X + Y$.
Indication : on pourra utiliser la formule $\int_0^1 (1-y)^{a-1} y^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ *pour* $a > 0$ *et* $b > 0$.

Exercice 4 (**6 points**). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
a) Donner la densité d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
b) Montrer que le couple (X, Y) est à densité et préciser celle-ci.
c) On définit les variables aléatoires $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{Y}$. Quelle est la loi du couple (U, V) ? (On précisera sa densité.)
Indication : considérer l'application $\varphi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, *définie par* $\varphi(x, y) = (x + y, \frac{x}{y})$, *et l'application* $\psi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to (\mathbb{R}_+^*)^2$, *définie par* $\psi(u, v) = (\frac{uv}{1+v}, \frac{u}{1+v})$.
d) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
e) Calculer $E(U)$ et $Var(U)$, $E(V)$ et $Var(V)$.