Feuille d'exercices 4. Mesures et mesure de Lebesgue.

Mesures.

Exercice 1 Soit X un ensemble non vide. Décrire toutes les mesures sur la tribu grossière $\{\emptyset, X\}$.

Exercice 2 **a)** Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Soit $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie par $P(A) = \frac{1}{6}\#A$. Vérifier que c'est une mesure, appelée *probabilité uniforme sur* X. (Une probabilité est une mesure positive telle que $P(X) = 1$).
b) Soit $A = \{2, 4, 6\}$ l'événement "obtenir un chiffre pair". Montrer que l'application $P(\dot{|}B) : B \in \mathcal{P}(A) \mapsto P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ est une mesure de probabilité sur $(A, \mathcal{P}(A))$.
c) Plus généralement, si X est un ensemble fini, comment définit-on une probabilité uniforme sur X ?
d) Soit $X = \mathbb{N}$. Existe-t-il une mesure de probabilité uniforme sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Exercice 3 Montrer qu'il n'existe pas de mesure non nulle sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$, finie et invariante par translation.

Exercice 4 a) Soit X un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{A}$. Pour toute partie $A \in \mathcal{A}$ de X, posons $\mu(A) = \mathrm{Card(A)}$ si A est un ensemble fini et $\mu(A) = +\infty$ sinon. Vérifier que μ définit une mesure positive sur $(X, \mathcal{T})$, appelée la *mesure de décompte, ou de comptage, sur* X.
b) Soit $m : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$. On pose $\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. Vérifier que c'est une mesure positive, et que la mesure de décompte sur X est la mesure associée à la fonction définie par $m(x) = 1$ pour tout $x \in X$.

Exercice 5 Soit P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$, et A, B deux ensembles mesurables (i.e. dans $\mathcal{A}$). On suppose $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 1/3$. En déduire que $1/12 \leq P(A \cap B) \leq 1/3$.

Exercice 6 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to Y$ une application.
a) On pose $\mathcal{B} := f_*\mathcal{A} = \{B \in Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une tribu et montrer que

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{B} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & B & \mapsto & \mu(f^{-1}(B)). \end{array}$$

définit une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, appelée *mesure image de* μ *par* f et notée $f_*\mu$.
b) Déterminer la mesure image $\nu = f_*\mu$ dans le cas où $\mu = \delta_a$ est la mesure de Dirac au point $a \in X$.
c) Soit $g : Y \to Z$ une application. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu)).$$

Exercice 7 Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

1. Montrer que $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ et $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ appartiennent à $\mathcal{A}$.
2. Montrer que $\mu(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n)$.
3. Montrer que si $\mu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ est finie alors $\overline{\lim}_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n)$.
4. En déduire que si $\lim_{n\to+\infty} A_n$ existe (i.e $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n$) alors $\lim_{n\to+\infty} \mu(A_n) = \mu(\lim_{n\to+\infty} A_n)$.

Exercice 8 Soit X un ensemble, on considère la tribu $\mathcal{P}(X)$ sur X, et la mesure de Dirac δ_a en $a \in X$.
1. Soit $A \in \mathcal{P}(X)$. Que signifie $\delta_a(A) > 0$?
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(X)$. Que signifie $\lim_{n\to\infty} \delta_a(A_n) = \delta_a(\lim_{n\to\infty} A_n)$? Donner des exemples et contre-exemples.
3. Déterminer la classe des parties δ_a-négligeables de X,
4. Expliciter à quelle condition une propriété est vraie δ_a-presque-partout.
5.. A t-on $e^{\cos(x^2)-1} = \mathbf{1}_{\{0\}}(x)$ pour δ_0 presque tout $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 9 1) Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille de mesures sur $(X, \mathcal{B})$.
Montrer que $\mu : \mathcal{B} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par

$$\mu(B) = \sum_{i\in I} \mu_i(B), \qquad \text{pour tout} \quad B \in \mathcal{B},$$

est une mesure sur $(X, \mathcal{B})$.
2) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ définie par $\mu(E) = \displaystyle\sum_{n\in E} a_n$ pour $E \subset \mathbb{N}$.
Montrer que μ définit une mesure σ-finie.

Mesure de Lebesgue.

Exercice 10 Montrer que la mesure $\lambda(I)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est égale à sa longueur. (*Commencer par les intervalles de longueur entière, puis de longueur inverse d'un entier non nul, puis de longueur rationnelle et enfin quelconque.*)
De la même manière, montrer que la mesure $\lambda(I_1 \times \cdots \times I_n)$ d'un pavé de $\mathbb{R}^n$ (les I_k sont des intervalles de $\mathbb{R}$) est égale à son volume.

Exercice 11 Que vaut la mesure $\lambda([0,1]^k)$ où $[0,1]^k \subset \mathbb{R}^n$ est un pavé de dimension $0 < k < n$? En déduire la mesure $\lambda(\mathbb{R}^k)$, avec $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$ un k-plan ($k < n$).

Exercice 12 On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ alors $\lambda(\{a\}) = 0$. Que peut-on dire de $\lambda(\mathbb{Q})$?
2. Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ alors $\lambda(U) > 0$.
3. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) > 0$ alors il existe un ouvert non vide contenu dans A.
4. Si K est un compact de $\mathbb{R}$ alors K est mesurable et $\lambda(K) < \infty$.
5. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) < \infty$ alors il existe un compact K tel que $A \subset K$.
6. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset B$, où $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 13 On reprend la construction du cantor $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ de la feuille 2. Calculer la mesure de Lebesgue de K_n, puis de K.

Exercice 14 Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Construire un ouvert non borné de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue au plus ε et qui soit dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15 Soient $E \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$ et $r \in \mathbb{R}^*$. On note $rE = \{rx, x \in E\}$. On veut montrer que $\lambda(rE) = |r|\lambda(E)$.
Montrer cette relation lorsque E est un intervalle, puis un ouvert de $\mathbb{R}$, puis un borélien de $\mathbb{R}$, puis un ensemble quelconque de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Exercice 16 Soit R la relation d'équivalence définie par :

$$xRy \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

1. On admet qu'il existe $A \subset [0,1]$ tel que tout $x \in \mathbb{R}$ soit équivalent à un unique point de A (ceci nécessite d'utiliser l'axiome du choix).
2. Montrer que si $u, v \in \mathbb{Q}$, $u \neq v$, alors $(A+u) \cap (A+v) = \emptyset$.
3. Supposons A mesurable, préciser la mesure de Lebesgue de

   $$B = \cup_{u\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}(A+u)$$

   en fonction de la mesure de A.
4. Vérifier que $[0,1] \subset B \subset [-1,2]$ et en déduire que A n'est pas Lebesgue mesurable.