Université de Picardie Jules Verne
UFR Sciences

2009-2010
Licence S5 Intégration

Feuille d'exercices 3. Tribus, fonctions mesurables

Tribus

Exercice 1 Soit $X = \{1, 2, 3\}$. Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(X)$, puis toutes les tribus de X. Trouver une tribu $\mathcal{B}$ et une application $f : X \to X$ telle que $f(\mathcal{B})$ n'est pas une tribu.

Exercice 2 Soit E un ensemble. L'ensemble des parties finies de E est-il une tribu?

Exercice 3 Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux tribus de $\mathbb{R}$ et $C \subset \mathbb{R}$.
(a) Les familles suivantes sont-elles des tribus ?

$$\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \,\mathrm{et}\, A \in \mathcal{B}'\}, \qquad \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{A : A \in \mathcal{B} \,\mathrm{ou}\, \mathrm{A} \in \mathcal{B}'\}.$$

(b) La famille suivante est-elle une tribu de $\mathbb{R}^2$?

$$\mathcal{B} \times \mathcal{B}' = \{A \times A' : A \in \mathcal{B} \,\mathrm{et}\, \mathrm{A}' \in \mathcal{B}'\} .$$

(c) Montrer que la famille suivante est une tribu sur C. Elle est appelée *tribu induite* sur C.

$$\{A \cap C, \ A \in \mathcal{B}\}.$$

Exercice 4 1) Soient $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y.
Vérifier que $f^*\mathcal{B} = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur X, appelée *image réciproque* de $\mathcal{B}$ par f.
Trouver un exemple tel que $\{f(A), \ A \in \mathcal{B}\}$ n'est pas une tribu.
2) Soient $f : X \to Y$ une application entre deux ensembles et $\mathcal{A}$ une tribu sur X.
Vérifier que $f_*\mathcal{A} = \{B \subset Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Y, appelée *image directe* de $\mathcal{A}$ par f.

Exercice 5 Une *partition finie* d'un ensemble X est une collection finie d'ensembles $\alpha = \{A_1, \ldots, A_n\}$ telle que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \qquad \text{et} \qquad A_i \bigcap A_j = \emptyset \ \text{ si } i \neq j.$$

Montrer que la tribu engendrée par la partition α est $\left\{ \bigcup_{i \in J} A_i, \ J \subset \{1, \ldots, n\} \right\}$.

Exercice 6
1) Vérifier que les parties au plus dénombrables et leurs complémentaires constituent une tribu $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{R}$.
2) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu engendrée par les singletons $\{x\}$.

Exercice 7 Décrire la tribu engendrée sur $\mathbb{R}$ par les intervalles $]n, +\infty[$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 Justifier quelles sont les assertions suivantes qui sont vraies, et lesquelles sont fausses
$*$ Un fermé de $\mathbb{R}$ est un borélien $*$ Un fermé de $\mathbb{R}$ est un ouvert $*$ Un ouvert de $\mathbb{R}$ est un borélien
$*$ Un ouvert de $\mathbb{R}$ est mesurable $*$ $\mathbb{Q}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ $*$ $\mathbb{Q}$ est ouvert dans $\mathbb{R}$
$*$ $\{x\}$ pour $x \in \mathbb{R}$ est un borélien. $*$ $\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$ $*$ $\mathbb{N}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
$*$ Un ensemble dénombrable est un ouvert de $\mathbb{R}$. $*$ Un ensemble dénombrable est un borélien de $\mathbb{R}$.
$*$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ $*$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$

Exercice 9
1) Montrer que $[a, +\infty[= \cap_n]a_n, +\infty[$ quand $(a_n)_n$ est une suite croissante convergeant vers $a \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que $]a, +\infty[= \cup_n [a_n, +\infty[$ quand $(a_n)_n$ est une suite décroissante convergeant vers $a \in \mathbb{R}$.
3) Notons $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. Montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles de la forme $]a, +\infty[$, avec $a \in \mathbb{R}$.
4) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ est une union au plus dénombrable de pavés de la forme $]\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^{n+1}}[^d$ avec $k, n \in \mathbb{Z}$.
5) Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est la tribu engendrée par les pavés ouverts et bornés.

Fonctions mesurables et boréliennes

Exercice 10 Montrer que l'image d'une partie mesurable par une application mesurable n'est pas toujours mesurable.

Exercice 11 Soit f une fonction de l'espace mesurable $(X, \mathcal{T})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, où $\mathcal{B}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$. Caractériser les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ mesurables lorsque $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ et lorsque $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$.

Exercice 12 Soit $\mathcal{A}$ la classe des sous-ensembles A de $\mathbb{Z}$ tels que, pour $n > 0$, $2n \in A$ ssi $2n + 1 \in A$.
(a) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{Z}$.
(b) Montrer que l'application $n \mapsto n + 2$ est une bijection mesurable de $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ vers $(\mathbb{Z}, \mathcal{A})$ mais que son inverse n'est pas mesurable.

Exercice 13 Si A est un ensemble mesurable de $\mathcal{T}$ tel que $B \in \mathcal{T}$ et $B \subset A$ entraîne que $B = \emptyset$ ou $B = A$, montrer que toute fonction $\mathcal{T}$-mesurable est constante sur A. En particulier, si $\mathcal{T}$ est engendrée par une partition, une fonction mesurable est constante sur chaque ensemble de la partition.

Exercice 14 Soient $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction, et $\mathcal{A}$ une tribu de X.
Montrer que f est mesurable si et seulement si $Re(f) : X \to \mathbb{C}$ et $Im(f) : X \to \mathbb{C}$ sont mesurables.

Exercice 15 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ des applications mesurables.
1) Montrer que les fonctions $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ et $x \mapsto \min(f(x), g(x))$ sont mesurables.
2) Montrer que les ensembles suivants sont dans $\mathcal{T}$:

$$A = \{x \in X |\ f(x) \leq g(x)\}, \quad B = \{x \in X |\ f(x) < g(x)\}, \quad C = \{x \in X |\ f(x) = g(x)\}$$

En déduire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{Q},\ e^{x \cos x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sin x)^{n^2}}{n!}\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la *troncature* f_n de f de niveau n par

$$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{rcr} n & \text{si} & f(x) > n \\ f(x) & \text{si} & |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si} & f(x) < -n. \end{array} \right.$$

Faire un dessin, puis montrer que f_n est mesurable et que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{1}{x} & \text{si} & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. , \quad g(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} E(x) & \text{si} & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si} & x \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n 1_{[n, n+1[}(x)$$

Exercice 18 Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f' est borélienne.

Exercice 19 Montrer que toute fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 20 Soient $(X, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente est mesurable.