Examen de Probabilités 2ème session - 28 juin 2007

Recommandations :
LIRE le sujet en entier avant de commencer. NE PAS RECOPIER les énoncés. Soigner la REDACTION, expliquer votre raisonnement, ne pas écrire des phrases qui n'ont pas de sens. Ne pas sortir en avance, se relire, chercher. Le BARÊME est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (Question de cours, 2 points). a) Énoncer le théorème de Borel-Cantelli.
b) Donner un exemple d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $0 < \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) < 1$.

Exercice 2 (2 points). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $0 < \lambda < 1$. On rappelle que ceci signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = (1-\lambda)\lambda^n$. Soit $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire indépendante de X de loi géométrique de paramètre $0 < \mu < 1$. Soit $Z = \min(X, Y)$. Trouver la loi de Z.

Exercice 3 (3 points). Un appareil comporte six lampes toutes nécessaires à son fonctionnement. La durée de vie de la lampe $i; 1 \leq i \leq 6$, est une variable aléatoire notée X_i de densité de probabilité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)kte^{-t/4}$, où $k > 0$ est une constante. L'unité de temps est l'année.
a) Quelle doit être la valeur de k ?
b) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
c) On suppose que les lampes fonctionnent indépendemment les unes des autres. Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne pendant 4 ans en continu à partir de sa mise en marche, sans qu'aucune lampe ne tombe en panne ?

Exercice 4 (4 points). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire réelle, telle que $E(|X|) < \infty$ et $E(X^2) < \infty$. On supppose que X satisfait la propriété suivante :
si Y et Z sont deux variables aléatoires réelles quelconques indépendantes et de même loi que X, alors X et $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ ont même loi.
a) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble et de même loi que X. Montrer que pour tout $m \geq 1$, si $n = 2^m$, alors X et $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{i=1}^{2^m} X_i$ ont même loi.
b) En déduire que X suit une loi normale, en énonçant précisément le résultat du cours utilisé.

Exercice 5 (10 points). *On pourra admettre le résultat de certaines questions pour traiter les suivantes.*
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X et Y suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$ et Z suit une loi à densité $f : z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{2}z^2e^{-z}$. Soient U et V les variables aléatoires définies par $U = XZ$ et $V = YZ$.

Première partie

a) Soit $\varphi :]0, 1[\times]0, 1[\times\mathbb{R}_+^* \to D \subset \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(x, y, z) = (xz, yz, z)$. Montrer que φ est un difféomorphisme sur son image $D = \{(u, v, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3,\ 0 < u < z \text{ et } 0 < v < z\}$ et calculer son inverse $\varphi^{-1} : D \to]0, 1[\times]0, 1[\times\mathbb{R}_+^*$ ainsi que les jacobiens de φ et φ^{-1}.
b) Montrer que le triplet (U, V, Z) est à densité et calculer sa densité $f_{(U,V,Z)}$.

c) Montrer qu'alors le couple (U,V) est à densité $f_{(U,V)}$ définie par

$$f_{(U,V)}(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_{(U,V,Z)}(u,v,z)\,dz\,,$$

puis calculer sa densité $f_{(U,V)}$.
d) En déduire que la variable aléatoire U a pour densité $f_U(u) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)\frac{1}{2}(1+u)e^{-u}$.

Deuxième partie

Soient $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes dans leur ensemble, avec les X_i de même loi que X, les Y_i de même loi que Y et les Z_i de même loi que Z.

e) Soit $U_i = X_i Z_i$. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i Z_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i$ converge presque sûrement vers une limite que l'on précisera.

f) Montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i} \longrightarrow 1$$

presque sûrement quand $n \to +\infty$.

g) Calculer $\mathrm{Var}(X)$, $E((X-Y)Z)$, $E((X-Y)^2 Z^2)$ et $\mathrm{Var}((X-Y)Z)$, puis montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - Y_i)Z_i$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance 2.

h) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers A, et si $b > 0$ est une constante, alors la suite $(\frac{A_n}{b})$ converge en loi vers $\frac{A}{b}$.
Indication : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, on pourra introduire la fonction continue bornée $f_b : x \in \mathbb{R} \mapsto f(\frac{x}{b})$.

i) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers A, et qu'une suite de variables aléatoires strictement positives $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une constante $b > 0$, alors $\frac{A_n}{B_n}$ converge en loi vers la variable aléatoire $\frac{A}{b}$.
Indication : On pourra commencer par montrer que le couple (A_n, B_n) converge en loi vers (A, b). Puis on observera que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(\alpha, \beta) = f(\frac{\alpha}{\beta})$ est continue et bornée. On en déduira le résultat voulu.

j) Montrer que si A suit une loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2, et si $b > 0$ est une constante alors $\frac{A}{b}$ suit une loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{\sigma^2}{b^2}$.

k) Déduire des questions précédentes que la suite $\displaystyle\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i} - 1\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi à préciser.