Université Picardie Jules Verne
Licence 3 Semestre 6

Faculté de Mathématiques et Informatique
« Méthodes expérimentales » 2006

Examen 2ème session de probabilités - 7 septembre 2006 à 8h30

Les calculatrices sont INTERDITES.
Les étudiant-e-s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.
Il est INUTILE de recopier les ÉNONCÉS.
Il est recommandé de ne pas sortir en avance et de RELIRE sa copie.
Le barême indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours ($\simeq$ 3 points) : Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi : x \mapsto \cosh(x)$. Énoncer le théorème de changement de variable dans ce cadre, donner la densité de la loi de X, puis celle de $Y = \varphi(X)$.

Exercice I ($\simeq$ 6 points) Soit $(\lambda_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par P_n la loi exponentielle de paramètre λ_n, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité $x \mapsto \lambda_n \exp(-\lambda_n x)\ \mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une expression de la fonction caractéristique φ_n de P_n. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Re(\varphi_n(t)) = 1 - \dfrac{t^2}{\lambda_n^2 + t^2}$.

2. Montrer que si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel strictement positif λ, alors $(P_n)_n$ converge étroitement, et préciser sa limite.

3. On suppose que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité Q, de fonction caractéristique φ.

3 a. Montrer que si $Q = \delta_0$ alors la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

3 b. On suppose à partir de maintenant que $Q \neq \delta_0$. Montrer qu'il existe un réel $t_0 \neq 0$ tel que $Re(\varphi(t_0)) < 1$. En déduire que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre réel $\lambda \geq 0$.

3 c. Conclure en remarquant que λ ne peut pas être nul.

Exercice II ($\simeq$ 9 points) : Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la loi admet la densité :

$$f_{(X,Y)} : (x, y) \ \mapsto\ e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2 a. Calculer (la densité de) la loi du couple $W = (X - Y, Y)$. En déduire que celle de $Z = X - Y$, appelée **loi de Laplace**, est

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}\,.$$

2 b. Calculer l'espérance, la variance, et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi de Laplace.

2 c. Calculer la fonction de répartition d'une loi de Laplace.

2 d. Montrer que la fonction caractéristique d'une loi de Laplace est donnée par :

$$t \ \mapsto\ \frac{1}{1+t^2}$$

Exercice III ($\simeq 7$ points) Dans cet exercice, chaque question peut se faire en admettant les résultats des questions précédentes.

Soit $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, et P la mesure de Lebesgue sur Ω. Le but de cet exercice est de montrer que P-presque tout nombre de $[0,1[$ est « normal », c'est-à-dire qu'il a autant de 0 que de 1 dans son développement binaire. Nous allons formaliser et démontrer cet énoncé à l'aide des questions suivantes.

Préliminaires : Si $\omega \in \Omega = [0,1[$, son développement binaire est une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\omega_i}{2^i}$. Par exemple, le développement binaire de 0 est 000000..., celui de 5/8 est 1010000..., celui de 1/16 est 0001000000000. *En général, cette suite est unique, sauf lorsqu'elle se termine par une infinité de 0 ou une infinité de 1. On* **ADMET** *que chaque nombre $\omega \in \Omega = [0,1[$ a un unique développement $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui* ne se termine pas *par une infinité de 1. On pourra utiliser le fait que ce développement vérifie toujours pour tout $n \geq 1$*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i} \leq \omega < \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}.$$

L'explication est la suivante. Si un nombre a pour développement 0110101**0**1111111111....., *il a aussi pour développement* 0110101**1**0000000000...... *(Pensez à l'écriture décimale, dans laquelle* $0,99999.... = 1,00000...$*) Autrement dit, si le développement binaire d'un nombre ω se termine par une infinité de 1 à partir d'un certain rang $n \geq 2$, alors ω s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\omega_i}{2^i} + \frac{0}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\omega_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}},$$

c'est-à-dire qu'on peut remplacer le dernier 0 par un 1, et l'infinité de 1 par une infinité de 0.

1. On appelle ξ_i, $i \geq 1$, la fonction qui à un nombre $\omega \in \Omega$ associe le i-ième coefficient dans son développement binaire.

1 a. Montrer que si $\xi_1(\omega) = 0$, alors $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$ et si $\xi_1(\omega) = 1$, alors $\omega \geq \frac{1}{2}$.

En déduire qu'en fait $\xi_1(\omega) = 0$ si et seulement si $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$ et $\xi_1(\omega) = 1$ si et seulement si $\omega \geq \frac{1}{2}$.

1 b. En déduire que ξ_1 est mesurable de $(\Omega = [0,1[, \mathcal{B})$ dans $\{0,1\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\emptyset\}$.

1 c. Calculer la loi de ξ_1, c'est-à-dire les valeurs $P(\{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = 1\})$, $P(\{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = 0\})$. (On rappelle que P est la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$.)

2 a. Plus généralement, montrer que si $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$, alors

$$\{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = x_1 \text{ et } \xi_2(\omega) = x_2 \ldots \text{ et } \xi_n(\omega) = x_n\} \subset [\frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[.$$

En utilisant le fait que ces intervalles sont deux à deux disjoints, montrer que cette inclusion est une égalité.

2 b. En déduire que les ξ_n sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{B})$ dans $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$.

3 a. Montrer que $P(\{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = x_1 \text{ et } \xi_2(\omega) = x_2 \ \ldots \text{ et } \xi_n(\omega) = x_n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

3 b. En utilisant le fait que $\{\omega \in \Omega,\ \xi_n(\omega) = x_n\} = \sqcup_{(x_1,\ldots x_{n-1})\in\{0,1\}^{n-1}} \{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = x_1, \ldots, \xi_{n-1}(\omega) = x_{n-1}\}$, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

3 c. À l'aide des questions précédentes, montrer que les (ξ_n) sont indépendantes.

4 a. Montrer que pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \to \frac{1}{2} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

4 b. Faire le lien avec l'affirmation « P-presque tout nombre de $[0,1[$ est normal ».