Université de Picardie Jules Verne **Année 2008-2009**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Examen 1ère session- 24 juin 2009 - 2 heures

La précision et la rigueur de la rédaction seront déterminantes pour la correction de cette épreuve.
Vous pouvez démontrer partiellement certaines questions, et/ou utiliser des résultats de questions intermédiaires que vous ne savez pas démontrer, mais vous devrez dans ce cas préciser clairement ce qui est admis.
Le barême est seulement indicatif, et pourra être modifié.

Exercice 1 (Question de cours-TD, 3 points). a) Énoncer le théorème de Borel-Cantelli.
b) Donner un exemple d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $0 < \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) < 1$.
c) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite indépendante de variables aléatoires de Bernoulli de paramètres 1/n. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité mais pas presque surement.

Exercice 2 (Exercice fait en TD, $\simeq 6$ points). Le but de l'exercice est de fournir une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi de Poisson de paramètre n. Soit $Z_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. On note Z une variable aléatoire réelle de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Première partie - Rappels sur des lois classiques La justification des résultats des questions b) et e) - et de ces questions uniquement - n'est pas indispensable s'ils sont corrects.
a) Déterminer la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
b) Soit A une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Donner son espérance, sa variance, et sa fonction caractéristique.
c) Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Décrire la loi de $A + B$.
d) Déterminer la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
e) Donner l'espérance, la variance, et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Deuxième partie
f) On note $Z_n^+ = \max(Z_n, 0)$, et $Z^+ = \max(Z, 0)$. Démontrer que

$$E(Z_n^+) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Z_n > t)dt \quad \text{et} \quad E(Z^+) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Z > t)\, dt$$

g) Rappeler la définition de la convergence en loi.
h) Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.
i) En déduire que $\mathbf{P}(Z_n > t) \to \mathbf{P}(Z > t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
j) Montrer que

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(Z_n > t)dt \to \int_0^\infty \mathbf{P}(Z > t)\, dt \quad \text{quand} \quad n \to \infty\,.$$

k) En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling.

Exercice 3 ($\simeq$ 3 **points**). On appelle loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$ la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$. On appelle loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$ de paramètre $c > 0$ la loi de densité $h_c : x \mapsto \frac{c}{\pi} \frac{1}{x^2+c^2}$.

a) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle symétrique de paramètre λ. Calculer sa fonction caractéristique.

b) Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. À l'aide du théorème d'inversion de Fourier, montrer que sa fonction caractéristique est $\varphi_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-c|t|}$.

c) Si X et Y sont deux variables aléatoires rélles *indépendantes* de lois de Cauchy de paramètres respectifs c et c', quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 4 ($\simeq$ 8 **points**). Le but est de répondre à la question suivante. Étant donné le cercle $C(O, 1)$ de centre O et de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde tirée au hasard ait une longueur inférieure ou égale à 1 ? Les deux premières parties de cet exercice sont indépendantes et proposent deux modélisations différentes de ce problème.

1) Une corde est un segment joignant deux points du cercle. Tirer une corde au hasard, c'est tirer au hasard un couple (X, Y) de points du cercle. La longueur de la corde est la *distance* $D(X, Y)$ entre les points X et Y. On suppose que les deux points sont tirés indépendemment l'un de l'autre. On identifie un point $x = e^{i\theta}$ avec l'angle correspondant $\theta \in [0, 2\pi[$. On suppose que $X = e^{i\theta_X}$ et $Y = e^{i\theta_Y}$ suivent une loi uniforme sur le cercle. Pour simplifier, on étudie plutôt les variables aléatoires θ_X et θ_Y. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [0, 2\pi[^2$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1.a) Si θ_1 et θ_2 sont deux angles fixés dans $[0, 2\pi[$, faire un dessin, puis calculer le carré de la distance entre $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.

1.b) Si θ_X et θ_Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$, donner la loi du couple (θ_X, θ_Y), puis montrer que le couple $(\theta_X - \theta_Y, \theta_Y)$ admet pour densité

$$f_{(\theta_X - \theta_Y, \theta_Y)}(z, y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathbf{1}_{[-z, 2\pi - z[}(y) \mathbf{1}_{[0, 2\pi[}(y)$$

En déduire que $Z = \theta_X - \theta_Y$ suit une loi, dite triangulaire, de densité

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{[-2\pi, 2\pi]}(z) \frac{2\pi - |z|}{4\pi^2}.$$

1.c) Montrer que la distance $D(X, Y)$ vérifie $D(X, Y) \leq 1$ si et seulement si $Z \in [-2\pi, -5\pi/3] \cup [-\pi/3, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi]$.

1.d) En déduire la probabilité que $D(X, Y) \leq 1$.

2) Le problème étant invariant par symétries, quitte à faire des rotations, on peut supposer que la corde est verticale. Dans ce cas, choisir une corde au hasard revient à choisir son abscisse au hasard. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [-1, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

2.a) Soit $x \in [-1, 1]$ et C_x la corde verticale du cercle $C(O, 1)$ passant par $(x, 0)$. Faire un dessin. Quelle est sa longueur $L(C_x)$?

2.b) Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi : x \mapsto L(C_x)$ l'application définie à la question précédente. Quelle est la loi suivie par la longueur $L(C_X) = \varphi(X)$ de la corde C_X correspondante ? (On utilisera le théorème de changement de variable pour donner sa densité.)

2.c) Quelle est la probabilité que $L(C_X) \leq 1$?

3) Synthèse : comparer les réponses précédentes et commenter.