Université de Picardie Jules Verne **Année 2006-2007**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Examen de Probabilités - 7 juin 2007

Recommandations :
LIRE le sujet en entier avant de commencer. NE PAS RECOPIER les énoncés. Soigner la REDACTION, expliquer votre raisonnement, ne pas écrire des phrases qui n'ont pas de sens. Ne pas sortir en avance, se relire, chercher. Le BARÊME est donné à titre indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (Question de cours, 3 points). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une autre variable aléatoire.
a) Donner la définition de la convergence presque sûre de (X_n) vers X. Donner un exemple d'une telle suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente
b) Donner la définition de la convergence en probabilité de (X_n) vers X. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en probabilité mais pas presque surement vers X.
c) Donner la définition de la convergence en loi de (X_n) vers X. Donner un exemple de suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en loi mais pas en probabilité vers X.

Exercice 2 (Un exercice fait en TD, 4 points). Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
a) Montrer que si $X_n \to X$ en probabilité, alors $E(\min(|X_n - X|, 1) \to 0$ quand $n \to \infty$.
b) Montrer que si $E(\min(|X_n - X|, 1) \to 0$ quand $n \to \infty$, alors $X_n \to X$ en probabilité.
c) À l'aide de **a)**, montrer que si $X_n \to X$ en probabilité, alors il existe une sous-suite (X_{n_k}) qui tend vers X presque sûrement.
d) Question bonus hors barême Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si de toute sous-suite $(X_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ on peut extraire une sous-suite $(X_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge presque surement vers X.

Exercice 3 (5 points). On considère une population de n individus numérotés $1, \dots, n$ ($n \geq 2$ est très grand). À chaque individu i est associé son revenu mensuel $r_i \geq 0$. On note $\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n r_i$ le revenu moyen de la population.
a) On choisit un individu ω au hasard suivant une loi uniforme (notée $\mathbb{P}$) sur $\Omega = \{1, \dots, n\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω. Soit $1 \leq i \leq n$ un individu fixé. Quelle est la probabilité de choisir l'individu i ?
b) On note $Y : (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ la variable aléatoire $Y : i \in \Omega \mapsto Y(i) = r_i$ qui à chaque individu i associe son revenu r_i. Justifier le fait que Y est une variable aléatoire.
c) Calculer l'espérance $E(Y)$ et la variance $\mathrm{Var}(Y)$.
d) On sonde maintenant la population en choisissant k fois de suite ($k \geq 1$) un individu au hasard sur Ω. On suppose que les k choix sont indépendants et faits suivant la loi uniforme notée $\mathbb{P}$ sur Ω. (Noter qu'un individu peut donc être choisi plusieurs fois.) On note $Y_j, 1 \leq j \leq k$ la variable aléatoire associant à la j-ème personne choisie son revenu. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire

$$\bar{Y}_k = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^k Y_j$$

en fonction des $(r_i)_{1\leq i\leq n}$ et de $\bar{r}$, ou encore en fonction de $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.
e) On fait maintenant tendre k vers $+\infty$. Étudier le comportement asymptotique de $E(\bar{Y}_k)$ et $\mathrm{Var}(\bar{Y}_k)$ quand $k \to +\infty$.
f) En déduire que $\bar{Y}_k$ converge en probabilité vers une limite que l'on précisera.
g) Améliorer le résultat précédent à l'aide d'un résultat du cours que l'on citera précisément.

Exercice 4 (5 points). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble, de même loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \geq 1$, on pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$. *On rappelle - et on pourra utiliser le fait - que la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densités respectives f_1 et f_2 a pour densité le produit de convolution $f_1 * f_2$ de f_1 et f_2 défini par*

$$f_1 * f_2(z) = \int_{\mathbb{R}} f_1(z-y) f_2(y) dy = \int_{\mathbb{R}} f_1(y) f_2(z-y) dy.$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, Y_n suit la loi $\Gamma(2,1)$ de densité $f(z) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z) z e^{-z}$.
b) Montrer que pour tout $\alpha > 0$, et tout $n \geq 1$, on a

$$P(Y_n \geq \alpha) = (1+\alpha)e^{-\alpha}.$$

c) Soit $\beta > 1$ et A_n l'événement $A_n = \{Y_n \geq \beta \ln n\}$. Montrer que

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{Y_n \geq \beta \ln n\}) = 0\,.$$

d) Pour tout $n \geq 1$, on pose $Z_n = Y_{2n}$. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On précisera leur loi.
e) Montrer que

$$P(\limsup_{n\to\infty}\{Z_n \geq \ln(2n)\} = 1\,.$$

f) En déduire que presque sûrement, on a

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{Y_n}{\ln n} = 1.$$

g) Pourquoi a-t-on utilisé la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ plutôt que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ dans les questions d) et e) ?

Exercice 5 (6 points). Première partie Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
a) Donner sa densité ainsi que l'allure de son graphe.
b) Donner sa fonction de répartition ainsi que l'allure de son graphe.
c) Donner sa fonction caractéristique.
d) Mêmes questions que a) et c) (densité et fonction caractéristique seulement) si Z est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
e) Mêmes questions (densité et fonction caractéristique seulement) si Z est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ d'espérance m et de variance σ^2.

Deuxième partie Soient $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_n, Y_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles positives indépendantes suivant toutes la même loi de probabilité exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
f) Calculer la fonction caractéristique φ de la variable aléatoire $X_1 - Y_1$.
g) À l'aide d'un développement limité de $\varphi(t)$, en déduire les valeurs de $E(X_1 - Y_1)$ et $E((X_1 - Y_1)^2)$.
h) Retrouver ces valeurs $E(X_1 - Y_1)$ et $E((X_1 - Y_1)^2)$ par un calcul direct.
i) Soit $n \geq 1$. Calculer la fonction caractéristique φ_n de la variable aléatoire Z_n définie par

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)\,.$$

j) Lorsque $n \to \infty$, montrer que φ_n converge vers la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi classique. Que peut-on en déduire sur le comportement de Z_n quand $n \to \infty$?
k) Retrouver ce résultat à l'aide d'un résultat du cours que l'on citera précisément.