Université Picardie Jules Verne
Licence 3 Semestre 6

Faculté de Mathématiques et Informatique
« Méthodes expérimentales » 2006

Examen 1ère session de probabilités - Jeudi 22 juin 2006

Les calculatrices sont INTERDITES.
Les étudiant-e-s prendront soin de LIRE le sujet en entier avant de commencer, et de RÉDIGER le plus clairement possible, avec des phrases en français.
Il est INUTILE de recopier les ÉNONCÉS.
Il est recommandé de ne pas sortir en avance et de RELIRE sa copie.
Le barême indiqué est approximatif, et pourra être modifié.

Question de cours ($\simeq$ 1,5 points) : Énoncer la loi forte des grands nombres.

Exercice I ($\simeq$ 8 points) : Le but est de répondre à la question suivante. Étant donné le cercle $C(O,1)$ de centre O et de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde tirée au hasard ait une longueur inférieure ou égale à 1 ? Les deux parties de cet exercice sont indépendantes et proposent deux modélisations différentes de ce problème.

1) Une corde est un segment joignant deux points du cercle. Tirer une corde au hasard, c'est tirer au hasard un couple (X,Y) de points du cercle. On suppose que les deux points sont tirés indépendemment l'un de l'autre. On identifie un point $x = e^{i\theta}$ avec l'angle correspondant $\theta \in [0, 2\pi[$. On suppose que $X = e^{i\theta_X}$ et $Y = e^{i\theta_Y}$ suivent une loi uniforme sur le cercle. Pour simplifier, on étudie plutôt les variables aléatoires θ_X et θ_Y. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [0, 2\pi[^2$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1.a) Si θ_1 et θ_2 sont deux angles fixés dans $[0, 2\pi[$, calculer le carré de la distance entre $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.

1.b) Si θ_X et θ_Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0, 2\pi[$, donner la loi du couple (θ_X, θ_Y), puis montrer que le couple $(\theta_X - \theta_Y, \theta_Y)$ admet pour densité

$$f_{(\theta_X - \theta_Y, \theta_Y)}(z, y) = \frac{1}{4\pi^2} \mathbf{1}_{[-z, 2\pi - z[}(y) \mathbf{1}_{[0, 2\pi[}(y)$$

En déduire que $Z = \theta_X - \theta_Y$ suit une loi dite triangulaire, dont on calculera la densité.

1.c) Montrer que $D(X,Y) \leq 1$ si et seulement si $Z \in [-2\pi, -5\pi/3] \cup [-\pi/3, \pi/3] \cup [5\pi/3, 6\pi]$.

1.d) En déduire la probabilité que $D(X,Y)^2 \leq 1$.

2) Le problème étant invariant par symétries, quitte à faire des rotations, on peut supposer que la corde est verticale. Dans ce cas, choisir une corde au hasard revient à choisir son abscisse au hasard. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [-1, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

2.a) Soit $x \in [-1, 1]$ et C_x la corde verticale du cercle $C(O,1)$ passant par $(x, 0)$. Quelle est sa longueur $L(C_x)$?

2.b) Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Soit $\varphi : x \mapsto L(C_x)$ l'application définie à la question précédente. Quelle est la loi suivie par la longueur $L(C_X) = \varphi(X)$ de la corde C_X correspondante ? (On utilisera le théorème de changement de variable pour donner sa densité.)

2.c) Quelle est la probabilité que $L(C_X) \leq 1$?

3) Synthèse : comparer les réponses précédentes et commenter.

Exercice II (**$\simeq 8$ points**) Soit α et k des réels strictement positifs et soit f l'application suivante :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = \frac{k}{|x|^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{|x|>1}$$

1. Déterminer k pour que f soit la densité d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$.
2. a. Discuter suivant les valeurs de α l'existence de l'espérance et la variance de X ; calculer leurs valeurs lorsqu'elles sont définies.
2. b. Montrer que la fonction caractéristique ϕ de X est réelle et paire.

3. On suppose dans cette question que $\alpha < 2$.
3. a) Justifier la convergence de l'intégrale $C = \alpha \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}} du$.
3. b) Montrer que $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1-\phi(t)}{|t|^\alpha} = C$.

4. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par la densité f. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
4. a. Montrer que si $\alpha > 2$ alors $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale dont on précisera l'espérance et la variance (ou la densité).
4.b. Montrer que si $\alpha < 2$, $\dfrac{S_n}{n^{1/\alpha}}$ converge en loi (on ne demande pas d'identifier la loi limite).
4.c. En déduire que pour $\alpha < 2$, $t \mapsto e^{-|t|^\alpha}$ est la fonction caractéristique d'une loi de probabilité.

5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par la densité f. On note $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Sous quelle(s) condition(s) la suite $\frac{S_n}{n}$ converge-t-elle en probabilité vers une variable aléatoire M ? Même question en remplaçant convergence en probabilité par convergence presque sûre. Lorsqu'elle converge, quelle est sa limite?

Exercice III (**$\simeq 4,5$ points**)
Soient U_n et V_n deux suites de variables aléatoires telles que $U_n \to U$ en loi et $V_n \to v$ en probabilité, pour une variable aléatoire réelle U et une constante $v > 0$.
1 Montrer que pour tout $\epsilon \in]0, v[$, $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ on a

$$-P(|V_n - v| > \epsilon) + P(U_n \leq tv - |t|\epsilon) \leq P(\frac{U_n}{V_n} \leq t) \leq P(U_n \leq tv + |t|\epsilon) + P(|V_n - v| > \epsilon)$$

2 En déduire que $U_n/V_n \to U/v$ en loi.

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.
3.a. Montrer rapidement que $E(|X_j|^p) < \infty$ pour $p = 1$ et $p = 2$ et calculer $E(X_j)$ et $E(X_j^2)$.
3.b. En utilisant la question 2, montrer que

$$\sqrt{2n} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{\sum_{j=1}^n X_j^2}$$

converge en loi vers une v.a. dont on précisera la loi.