Université de Picardie Jules Verne — **Année 2008-09**
Master M2 — **Modélisation mathématique pour l'écologie**

Feuille 1 - 16/09/08- Autour de l'équation logistique

Modèle en temps continu

On veut décrire l'évolution au cours du temps d'une population. On note $t \in \mathbb{R}$ le temps, et $N(t) \in \mathbb{R}$ le nombre d'individus de la population. On modélise alors l'évolution de N par une *équation différentielle*

$$N' = f(N)\,,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une *fonction continue et dérivable* fixée par la modélisatrice, en fonction de paramètres liés au milieu.

Si la population $N(0)$ à l'instant $t = 0$ est connue et vaut N_0, on dit alors que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto N(t) \in \mathbb{R}$ qui décrit l'évolution de la population est *solution de l'équation différentielle* $N' = f(N)$, i.e. elle vérifie

$$N(0) = N_0 \quad \text{et} \quad N'(t) = f(N(t)) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Remarque 1. *D'un point de vue réaliste, un nombre d'individus est un entier, pas un réel. Mais s'il s'agit d'un nombre d'arbres, de plantules, de cellules, on prendra la centaine, le millier, le million d'individus comme unité, et travailler avec des nombres réels est bien plus pratique pour utiliser l'analyse mathématique.*

Remarque 2. *La dérivée $N'(t)$ à l'instant $t \in \mathbb{R}$ est un taux de variation infinitésimal, c'est-à-dire la limite de la quantité $\dfrac{N(t+\delta t) - N(t)}{\delta t}$ quand δt devient infiniment petit. Supposer que $N' = f(N)$ signifie que la variation de population dépend essentiellement de $N(t)$ et du milieu, supposé fixe.*

Exercice 1. (a) Trouver la solution de l'équation différentielle $N' = 0$ qui a pour condition initiale $N(0) = N_0$, où N_0 est une constante.
(b) Même question si $N' = a$, et $N(0) = N_0$, où $a > 0$ est une constante.

Une fonction $f\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ est *lipschitzienne* s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x, y \in]a,b[$, $|f(x) - f - y)| \leq C|x - y|$.

Théorème 3 (Cauchy-Lipschitz)**.** *Supposons que la fonction f est* lipschitzienne *sur l'intervalle $I =]a,b[$. Alors il existe une unique fonction N qui est solution de l'équation différentielle $N' = f(N)$ avec condition initiale $N(0) = N_0$.*

Remarque 4. *En pratique, si la fonction f est " de classe C^1", c'est-à-dire continue, dérivable et de dérivée f' continue sur I, alors elle est lipshitzienne et on a unicité des solutions.*
Un exemple non lipschitzien : $y' = \sqrt{y}$ sur $[0,T]$.

Exercice 2. `Pour les Masters maths :`
(a) `Redémontrer le théorème de Cauchy-Lipschitz.`
(b) `Montrer qu'il n'y a pas unicité des solutions pour l'équation` $y' = \sqrt{y}$ `sur` $[0,T]$.

Remarque 5. *L'unicité de la solution est très utile en pratique. Par exemple, si je trouve une fonction qui est solution, eh bien je sais que c'est la seule.*

Exercice 3 (Modèle malthusien)**.** C'est le modèle le plus simple à temps continu pour la dynamique d'une seule espèce. On suppose que la variation infinitésimale $N'(t)$ de la population est due uniquement[1] aux naissances et aux morts, que les nombres de naissances et de morts sont proportionnels à la population, et que les facteurs de proportionnalité ν (pour les naissances) et μ (pour les morts) sont constants. On obtient l'équation

$$N'(t) = \nu N(t) - \mu N(t) = rN(t) \quad \text{avec} \quad r = \nu - \mu$$

(a) Trouver les solutions de cette équation différentielle.

[1] Ni immigration, ni expulsions, par exemple

Ce modèle fut porposé par Malthus en 1798 et rend assez bien compte de l'estimation de l'évolution de la population mondiale du 17ème au 21ème siècle faite par les Nations-Unies.

Date	milieu 17ème	début 19 ème	1918-1927	1960	1974	1987	2000	2050	2100
Population (en milliards)	0,5	1	2	3	4	5	6,3	10	11,2

(b) Estimer la valeur de la constante r dans le modèle correspondant aux données ci-dessus.
(c) Discuter le modèle.

Exercice 4 (Le modèle logistique)**.** En 1838, Verhulst propose un modèle plus réaliste, qui limite la taille de la population, le *modèle logistique* :

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right).$$

Ici, K est la "taille idéale" de la population, appelée *capacité biotique*.
(a) Un *état d'équilibre* de l'équation différentielle est une solution constante au cours du temps. Montrer que $t \in \mathbb{R} \mapsto N(t)$ est constante égale à N_0 si et seulement si $f(N_0) = 0$.
(b) En déduire que l'équation différentielle ci-dessus admet deux états d'équilibre.
(c) Montrer, à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz, que *deux solutions ne peuvent jamais se croiser*.
(d) Montrer que si $0 < N(0) < K$ alors la solution $t \geq 0 \mapsto N(t)$ est croissante, et si $N(0) > K$, N est décroissante.
(e) Vérifier que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

est solution de l'équation différentielle logistique de condition initiale $N(0) = N_0$.
(f) Retrouver l'expression des solutions en utilisant la méthode classique pour les équations différentielles ordinaires à variables séparables.
(g) Tracer l'allure des solutions, en distinguant les cas $N_0 > K$, $0 < N_0 < K/2$, $K/2 \leq N_0 < K$.

Exercice 5. Raymond Pearl et Lowell J. Reed, en 1920, redécouvrent le modèle logistique et l'utilisent pour modéliser l'évolution de la population des États-Unis de 1790 à 1910. Ils utilisent pour cela les données suivantes :

1790	1850	1919
3.929.000	23.192.000	91.972.000

(a) Déterminer r et K à partir de ces données.
(b) Des données supplémentaires sont disponibles :

Date	1800	1820	1880	1920	1930	1960	1980
Données	5.308.000	9.638.000	50.156.000	105.711.000	122.775.000	179.300.000	226.500.000
Modèle							

Calculer l'erreur entre la population réelle et la population donnée par le modèle.