Université de Picardie Jules Verne **Année 2014-2015**
IUT Techniques de commercialisation

TD de statistiques. Corrigés des exercices d'entrainement page 56 et 57.

Exercice 1. Une enquête faite auprès d'un échantillon de 50 étudiants de premier cycle universitaire a montré qu'ils dépensent en moyenne 250 euros par mois pour vivre. L''ecart-type de ces dépenses, calculé sur l'échantillon est de 20 euros. Une enquête précédente avait montré que cette dépense était de 240 euros. Peut-on dire, au seuil de signification de 95%, que la dépense a changé ?

corrigé La population est celle des étudiants de premier cycle universitaire sur plusieurs années. On suppose que $N = +\infty$. L'échantillon considéré a une taille $n = 50$.
On s'intéresse à une variable quantitative, la dépense X par étudiant par mois.
Sur l'échantillon, la moyenne de cette variable vaut $m = 250$, et l'écart-type $s = 20$.

On veut savoir si la dépense a changé par rapport à la précédente enquête ou non. La précédente enquête avait permis d'estimer la dépense moyenne μ par étudiant sur l'ensemble de la population à $\mu = 240$ euros. Si elle n'a pas changé, cela signifie qu'on peut toujours affirmer que $\mu = 240$ euros. Sinon, $\mu \neq 240$ euros.

Etape 1 : Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = 240$, hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 240$.

Etape 2 : Seuil de signification $1 - \alpha = 95\%$.

Etape 3 : On calcule la statistique calculée et la statistique théorique. **On fait les calculs en supposant H_0 vraie.**

L'échantillon est grand, $n \geq 30$, donc $S_{th} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$. De plus,

$$S_{cal} = \frac{m - \mu}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{(m - \mu)}{s} \times \sqrt{n-1} = \frac{250 - 240}{20} \times \sqrt{49} = \frac{7}{2} = 3,5\,.$$

Etape 4 : On a $|S_{cal}| = +3;5 > S_{th} = 1,96$. Donc on rejette H_0. On peut dire, avec probabilité 95%, que la dépense moyenne des étudiants a changé.

Exercice 2. Un industriel fabrique des résistances dont la résistance moyenne est censée valoir 1100 ohms. Un client souhaite vérifier cette valeur sur un échantillon de 50 résistances.Il trouve une résistance moyenne de 1060 ohms, avec un écart-type sur l'échantillon de 70 ohms. Peut-il affirmer que l'industriel ment ?

Corrigé : La population est celle des résistances fabriquées. On suppose $N = +\infty$. L'échantillon considéré a une taille $n = 50$.

On s'intéresse à une variable quantitative, la résistance (grandeur physique, dont l'unité est l'ohm) d'une résistance (objet utile en électricité, ayant une grande résistance).

Sur l'échantillon, la résistance moyenne vaut $m = 1060$ et l'écart type $s = 70$. On veut savoir si l'industriel ment ou pas, c'est-à-dire si la résistance moyenne des résistances fabriquées vaut 1100 ohms ou pas.

Etape 1 : Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = 1100$, hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 1100$.

Etape 2 : Seuil de signification $1 - \alpha = 95\%$.

Etape 3 : On calcule la statistique calculée et la statistique théorique. **On fait les calculs en supposant H_0 vraie.** L'échantillon est grand, $n \geq 30$, donc $S_{th} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$. De plus,

$$S_{cal} = \frac{m - \mu}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{(m - \mu)}{s} \times \sqrt{n-1} = \frac{1060 - 1100}{70} \times \sqrt{49} = -4.$$

Etape 4 : On a $|S_{cal}| = +4 > S_{th} = 1,96$. Donc on rejette H_0. On peut dire, avec probabilité 95%, que la résistance moyenne n'est pas égale à 1100 ohms.

Exercice 3. Un institut de sondage affirme que lors des prochaines élections, 55% des électeurs voteront pour le candidat A. Une autre enquête portant sur un échantillon de 36 personnes montre que 16 d'entre elles disent qu'elles voteront pour A. Peut-on dire que l'institut de sondage se trompe ?

Corrigé : La population est celle des électeurs qu'on suppose très grande. L'échantillon a une taille $n = 36$. La variable étudiée est qualitative. Pour un électeur donné, on regarde s'il va voter A ou non. Sur l'échantillon , la proportion d'électeurs votant pour A vaut $p = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = 0,44$. L'institut de sondage prétend que sur l'ensemble des électeurs, cette proportion vaut $\pi = 55\% = 0,55$.

Etape 1 : Hypothèse nulle : $H_0 : \pi = 0,55$, hypothèse alternative $H_1 : \pi \neq 0,55$.

Etape 2 : Seuil de signification $1-\alpha = 95\%$.

Etape 3 : On calcule la statistique calculée et la statistique théorique. **On fait les calculs en supposant H_0 vraie.** L'échantillon est grand, $n \geq 30$, donc $S_{th} = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{0,975} = 1,96$. De plus,

$$S_{cal} = \frac{p-\pi}{s/\sqrt{pi(1-pi)/n}} = \frac{(p-\pi)}{\sqrt{pi(1-\pi)}} \times \sqrt{n} = \frac{-0,11}{\sqrt{0,55 \times 0,45}} \times \sqrt{36} = -1,32.$$

Etape 4 : On a $|S_{cal}| = +1,32 < S_{th} = 1,96$. Donc on ne peut pas rejeter H_0. Mais on ne peut pas calculer la probabilité d'erreur, i.e. la probabilité d'une erreur de deuxième espèce.

Exercice 4. Un boucher vend des poulets achetés dans une ferme voisine. La fermière prétend que le poids moyen des volailles est de $1,7$kg tands que le boucher, sur un lot de 20 poulets, trouve un poids moyen de $1,65$ avec un 'ecart-type de $150g$. Peut-il faire confiance à la ferme ? On prendra un seuil de signification de 99%.

Corrigé La population est celle des poulets. L'échantillon a une taille $n = 20$ c'est un petit échantillon. On s'intéresse au poids des poulets. C'est une variable quantitative. La fermière prétend que le poids moyen vaut $\mu = 1,7$. Le boucher mesure sur l'échantillon $m = 1,65$ et $s = 0,15$.

Etape 1 : $H_0 : \mu = 1,7$, hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq 1,7$.

Etape 2 : Seuil de signification $1-\alpha = 99\%$.

Etape 3 : On calcule la statistique calculée et la statistique théorique. **On fait les calculs en supposant H_0 vraie.** L'échantillon est **petit**, $n < 30$, donc $S_{th} = t_{1-\alpha/2}^{(n-1)} = t_{0,995}^{(19)} = 2,86$. De plus,

$$S_{cal} = \frac{m-\mu}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{1,65-1,7}{0,15} \times \sqrt{19} = -1,45.$$

Etape 4 : On a $|S_{cal}| = 1,45 < S_{th} = 1,96$. Donc on ne peut pas rejeter H_0 au seuil de signification de 99%. Mais comme on ne connait pas l'erreur de deuxième espèce β, on ne connait pas la probabilité d'erreur.