Université de Picardie Jules Verne — **Année 2005-2006**
Licence de Mathématiques L3 — **Probabilités**

Corrigé du partiel de Probabilités - 10 Mai 2006

Exercice 1 (2 points). À la fin du semestre, 70% des étudiants assidus en cours obtiennent leur semestre, alors que 10% des étudiants non assidus obtiennent leur semestre. On estime que 70% des étudiants sont assidus. Quelle proportion y a-t-il d'étudiants non assidus parmi ceux qui ont obtenu leur semestre ? (On construira un modèle probabiliste, et on précisera les événements considérés.)

corrigé On introduit l'ensemble Ω des étudiants, la tribu est l'ensemble ¶(Ω) des parties de Ω, et P est la probabilité uniforme sur $P(\Omega)$. On appelle A l'ensemble des étudiants assidus, et B l'ensemble des étudiants qui réussissent leur semestre. L'énoncé donne $P(A) = 70\%$, $P(B|A) = 70\%$, $P(B|A^c) = 10\%$. À l'aide de la formule de Bayes, on en déduit

$$P(A^c|B) = \frac{P(B|A^c)P(A^c)}{P(B|A^c)P(A^c) + P(B|A)P(A)} = \frac{3}{52} \simeq 5,8\%\,.$$

Exercice 2 (2 points). Une famille a deux enfants (pas des jumeaux). Quelle est la probabilité pour que ce soient un garçon et une fille sachant que le premier est un garçon ? Sachant que l'un des deux est un garçon ? (On construira un modèle probabiliste, et on précisera les événements considérés.)

Corrigé l'ensemble Ω est l'ensemble $\Omega = \{\text{garçon, fille}\}^2 = \{(g, g), (g, f), (f, g), (f, f)\}$, muni de la tribu de toutes les parties, et de la probabilité uniforme P. On appelle A l'événement “le premier enfant est un garçon”, soit encore $A = \{(g, f), (g, g)\}$, $B = \{(g, f), (f, g)\}$ l'événement “obtenir un garçon et une fille” et $C = \{(g, g), (g, f), (f, g)\}$ l'événement “obtenir au moins un garçon”. On a $P(A) = P(B) = 1/2$ et $P(C) = 3/4$. Puis $P(B|A) = \frac{P(\{(g,f)\})}{P(A)} = \frac{1}{2}$ et $P(B|C) = \frac{P(\{(g,f),(f,g)\})}{P(C)} = 2/3$.

Exercice 3 (2 points). On choisit un point M au hasard dans un segment $[AB]$ de longueur 1. Quelle est la probabilité pour que le produit de distances $AM.MB$ soit supérieur à $\alpha = \frac{5}{36}$? Expliquer votre modélisation du problème.

Corrigé On note $x = AM$. On suppose que choisir M au hasard sur $[AB]$ revient à choisir x au hasard dans $[0, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ (loi uniforme sur $[0, 1]$). On a $AM.MB \geq 5/36$ ssi $x(1 - x) \geq 5/36$. On est ramené à la résolution d'une inéquation du second degré. $x^2 - x + 5/36 \leq 0$ ssi x est situé entre les deux racines de ce polynôme, c'est-à-dire encore (calculs à faire) $1/6 \leq x \leq 5/6$.

Finalement la probabilité que $AM.MB \geq 5/36$ est la probabilité que $1/6 \leq x \leq 5/6$, c'est-à-dire $2/3$.

Exercice 4. Soient μ et ν deux mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Le *produit de convolution $\mu * \nu$ des deux mesures* est défini de la manière suivante : pour tout borélien $A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x + y) d\nu(y) \right) d\mu(x)\,.$$

a) (3 points) $*$ Rappeler la définition d'une mesure de probabilité.
$*$ Vérifier que $\mu * \nu$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.
$*$ Vérifier que $\mu * \nu = \nu * \mu$.
b) (2 points) Supposons que μ a pour densité f_μ, et ν a pour densité f_ν.
$*$ Rappeler la définition de la densité d'une mesure.
$*$ Montrer que $\mu * \nu$ a pour densité la fonction $f_\mu * f_\nu$ *produit de convolution de f_μ et f_ν* définie par

$$f_\mu * f_\nu(z) = \int_{\mathbb{R}} f_\mu(z - t) f_\nu(t) dt\,.$$

c) (2 points) Soient $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $Y : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives P_X et P_Y, à densités respectives f_X et f_Y. Quelle est la loi du couple $W = (X + Y, Y)$? En déduire celle de $Z = X + Y$. On précisera leurs densités si ces variables aléatoires sont à densit‘e.

corrigé a) Pour la définition, voir le cours. On vérifie aisément que

$$\mu \star \nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} 1 d\mu(x) d\nu(y) = \mu(\mathbb{R})\nu(\mathbb{R}) = 1\,.$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de boréliens deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned} \mu \star \nu(\cup_n A_n) &= \int\int 1_{\cup_n A_n}(x + y) d\mu(x) d\nu(y) = \int\int \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n}(x + y) d\mu(x) d\nu(y) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\int 1_{A_n}(x + y) d\mu(x) d\nu(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu \star \nu(A_n)\,. \end{aligned}$$

(L'interversion $\int\int$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ pourrait être détaillée : la suite $(\sum_{k=1}^n 1_{A_k})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions positives, le théorème de convergence monotone permet donc de conclure.)

Le fait que $\mu \star \nu = \nu \star \mu$ est une application directe du théorème de Fubini : si A est un borélien de $\mathbb{R}$, alors 1_A est une fonction positive et mesurable, donc le théorème de Fubini permet de changer l'ordre d'intégration.

b)La mesure μ a pour densité f_μ si pour tout borélien A, la mesure $\mu(A)$ est égale à $\int_{\mathbb{R}} 1_A d\mu(x)$. Un changement de variable $\varphi : y \mapsto x+y$, puis l'utilisation du théorème de Fubini vont permettre d'obtenir le résultat voulu. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\mu * \nu(A) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x+y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(x+y) f_\nu(y)\, dy \right) f_\mu(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1_A(z) f_\nu(z-x)\, dz \right) f_\mu(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_A(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f_\nu(z-x) f_\mu(x)\, dx \right) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} 1_A(z) f_\mu * f_\nu(z)\, dz\,.
\end{aligned}$$

c) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, le couple (X,Y) a donc pour loi $P_{(X,Y)} = P_X \times P_Y$ et pour densité $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$. Effectuons le changement de variables $\Psi : (x,y) \mapsto (x+y, y)$. C'est un difféomorphisme C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de Jacobien égal à 1. Si on applique le théorème de changement de variables, on trouve que le couple $W = (X+Y, Y) = \Psi(X,Y)$ a une loi P_W à densité $f_{(X+Y,Y)}(z,y) = f_X(z-y) f_Y(y)$. . La densité marginale de $Z = X+Y$ vaut alors $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy = f_X * f_Y(z)$. Autrement dit, $P_Z = P_X * P_Y$.

Exercice 5. On dispose d'un lot d'ampoules électriques identiques. On modélise la durée de vie (en heures) d'une ampoule par une variable aléatoire T de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
a) (1 point) Rappeler la définition de la loi exponentielle de paramètre λ (donner sa densité).
b) (1,5 point) Calculer l'espérance $E(T)$ de T, sa variance $Var(T)$ et son écart-type $\sigma(T)$.
c) (0,5 point) On suppose que $\lambda = 10^{-4}$. Quelle est la probabilité qu'une ampoule s'éteigne au bout d'un temps au plus égal à $T_0 = 336$ heures ?
d) (1,5 point) On branche cinq ampoules simultanément à l'instant $t = 0$. Quelle est la probabilité qu'à un instant $t_0 > 0$ donné,
(i) toutes les ampoules fonctionnent encore ?
(ii) aucune ampoule ne fonctionne ?
(iii) Au moins une ampoule fonctionne encore ?
e) (1 point) On branche une première ampoule à l'instant $t = 0$. On note T_1 la variable aléatoire modélisant sa durée de vie. Dès qu'elle s'éteint, on la remplace immédiatement par une ampoule neuve (on néglige le temps de remplacement), et on note T_2 la durée de vie de la deuxième ampoule. Quelle est la loi de la variable aléatoire T représentant la durée d'éclairage à l'aide de deux ampoules ? Quelle est son espérance $E(T)$? Commentez.
f) (0,5 point) Même question avec $n \geq 2$ ampoules.
g) (1 point) Soit θ un instant fixé. On allume une ampoule A_1 de durée de vie T_1 à l'instant $t = 0$. Quand elle tombe en panne, on la remplace par une nouvelle ampoule A_2 de durée de vie T_2. De même, quand la deuxième tombe en panne, on la remplace par une ampoule A_3 de durée de vie T_3, et ainsi de suite. On note N la variable aléatoire modélisant le nombre d'ampoules utilisées jusqu'a l'instant θ.
(i) Quelle est la probabilité que l'ampoule A_1 soit allumée à l'instant θ ?
(ii) Exprimer la probabilité $P(N = k)$ à l'aide des variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots T_k$.

Corrigé
a) La loi $\mathcal{E}(\lambda)$ est la loi de densité $f(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$ sur $\mathbb{R}$.
b) Un calcul donne

$$E(T) = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}+} y e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda}\,.$$

De même,

$$E(T^2) = \int_{\mathbb{R}_+} \lambda x^2 e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}_+} y^2 e^{-y}\, dy = \frac{2}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}_+} y e^{-y} dy = \frac{2}{\lambda^2}\,.$$

On en déduit que $Var(T) = E(T^2) - E(T)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ et $\sigma(T) = \sqrt{Var(T)} = \frac{1}{\lambda}$.
c) La probabilité que l'ampoule s'éteigne avant T_0 vaut

$$P(T \leq T_0) = \int_0^{T_0} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda T_0}\,.$$

d) (i) La probabilité que les 5 ampoules fonctionnent encore vaut

$$P(T_1 \geq t_0 \text{ et } T_2 \geq t_0 \text{ et } \ldots T_5 \geq t_0) = \Pi_{i=1}^5 P(T_i \geq t_0) = \left(e^{-\lambda t_0}\right)^5 = e^{-5\lambda t_0}\,.$$

d) (ii) La probabilité qu'aucune ampoule ne fonctionne à l'instant t_0 vaut

$$P(T_1 \leq t_0 \text{ et } T_2 \leq t_0 \text{ et } \ldots T_5 \leq t_0) = \Pi_{i=1}^5 P(T_i \leq t_0) = (1 - e^{-5\lambda t_0})^5\,.$$

d)(iii) La probabilité qu'au moins une ampoule fonctionne vaut 1 moins la probabilité calculée ci-dessus, soit encore

$$P(T_1 \geq t_0 \text{ ou } T_2 \geq t_0 \text{ ou } \ldots T_5 \geq t_0) = 1 - \Pi_{i=1}^5 P(T_i \leq t_0) = 1 - (1 - e^{-5\lambda t_0})^5\,.$$

e) La durée de vie totale T des deux ampoules vaut $T = T_1 + T_2$. Sa loi est la loi à densité (voir exo précédent par exemple)

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x-y) f(y) dy = \int_0^x \lambda^2 e^{-\lambda(x-y)} e^{-\lambda y} dy = 1_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda^2 x e^{-\lambda x}$$

Son espérance vaut $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = \frac{2}{\lambda}$. Autrement dit, la durée d'éclairage moyenne avec deux ampoules vaut deux fois la durée d'éclairage moyenne avec une ampoule.
f) La durée de vie de n ampoules vaut $T = T_1 + \ldots T_n$, et son espérance vaut $\frac{n}{\lambda}$.
g) (i) La probabilité que A_1 soit allumée vaut $P(T_1 \geq \theta) = P(N = 1) = 1 - e^{-\lambda\theta}$.
g) (ii) $P(N = k) = P(T_1 < \theta \text{ et } T_1 + T_2 < \theta \text{ et } T_1 + \ldots T_{k-1} < \theta \text{ et } T_1 + \ldots T_k \geq \theta)$.