Corrigé devoir de probas pour le 5 mai 2009

Corrigé 1. a) Considérons le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ centré en la machine à lancer. Pour tout temps $t \geq 0$, notons $(x(t), y(t))$ la position de la balle dans ce repère.

La loi fondamentale de la dynamique affirme que la masse de la balle multipliée par son accélération est égale à la somme des forces appliquées à la balle, soit ici simplement la gravitation. Autrement dit, on a

$$m \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} ,$$

où g est la constante de gravitation universelle. Nous en déduisons, en résolvant les équations différentielles en x et en y, que pour tout $t \geq 0$, on a

$$x(t) = at + c \quad \text{et} \quad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + bt + d\,,$$

avec a, b, c, d quatre constantes réelles déterminées par les conditions initiales. La position $x(0) = y(0) = 0$ donne $c = d = 0$, et la vitesse initiale $x'(0) = \cos\alpha$ et $y'(0) = \sin\alpha$ donne $a = \cos\alpha$ et $b = \sin\alpha$. Autrement dit, on a pour tout $t \geq 0$,

$$x(t) = t\cos\alpha \quad \text{et} \quad y(t) = -g\frac{t^2}{2} + t\sin\alpha\,.$$

Le temps T strictement positif que met la balle à atterrir vérifie $y(T) = 0$, ce qui équivaut encore à

$$T = \frac{2\sin\alpha}{g}$$

La distance au sol parcourue au moment de l'atterissage vaut $D(T) = x(T) = \frac{2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$.

b) Si l'angle A est maintenant une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\pi/4 - \varepsilon, \pi/4 + \varepsilon]$, alors l'instant d'atterrissage et la distance au sol parcourue sont également des variables aléatoires, vérifiant

$$T = \frac{2}{g}\sin A \quad \text{et} \quad D = \frac{2}{g}\sin A\cos A\,.$$

Bien sûr, si A est mesurable, alors T et D aussi.

La v.a. A a pour densité la fonction $f_A = \frac{1}{2\varepsilon}\mathbf{1}_{]\frac{\pi}{4}-\varepsilon,\frac{\pi}{4}+\varepsilon[}$. Soit maintenant $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Calculons

$$\begin{aligned}
E(h(T)) &= \int_\Omega h \circ T(\omega) d\mathbf{P}(\omega) = \int_\Omega h(\frac{2}{g}\sin A(\omega))d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_\mathbb{R} h(\frac{2}{g}\sin a)d\mathbf{P}_A(a) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\pi/4-\varepsilon,\pi/4+\varepsilon[} h(\frac{2}{g}\sin a)da \\
&= \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4}-\varepsilon),\frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4}+\varepsilon)[} h(y)\ \frac{g}{2}\ \frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2y^2}{4}}}\,dy
\end{aligned}$$

On a effectué ici le changement de variables $\varphi : a \in]\frac{\pi}{4} - \varepsilon, \frac{\pi}{4} + \varepsilon[\mapsto y = \frac{2}{g}\sin a \in]\frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4} - \varepsilon), \frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4} + \varepsilon)[$. Cette application est évidemment C^∞, bijective (est-ce clair pour vous ?), et sa dérivée ne s'annule pas (dès que $\varepsilon < \frac{\pi}{4}$). C'est donc un C^1 (et même C^∞) difféomorphisme.

Le calcul ci-dessus étant valable pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on en déduit que T a pour densité la fonction $f_T : y \mapsto \frac{g}{4\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{g^2y^2}{4}}}\mathbf{1}_{]\frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4}-\varepsilon,\frac{2}{g}\sin(\frac{\pi}{4}+\varepsilon[}(y)$.

Pour trouver la densité de $D = \frac{2}{g}\sin A\cos A = \frac{\sin 2A}{g}$, on effectue le même type de calculs, mais en étant prudents. En effet, la fonction $x \mapsto \sin 2x$ n'est pas bijective sur son image au voisinage de $\pi/4$ (tracez son graphe !) car pas injective (croissante jusqu'en $\pi/4$, puis décroissante. Commençons par un changement de variables $x = 2a$. Si h est une fonction mesurable bornée, on a

$$E(h(D)) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\pi/4-\varepsilon,\pi/4+\varepsilon[} h(\frac{\sin 2a}{g})da = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\pi/2-2\varepsilon,\pi/2+2\varepsilon[} h(\frac{\sin x}{g})\frac{dx}{2}$$

On utilise ensuite le fait que $\sin(\pi/2+x) = \sin(\pi/2-x)$, on découpe l'intégrale en deux intégrales sur les deux intervalles $]\pi/2-\varepsilon, \pi/2[$, et $]\pi/2, \pi/2+\varepsilon[$. Ces deux intégrales étant égales, on obtient

$$E(h(D)) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\pi/2,\pi/2+\varepsilon[} h(\frac{\sin x}{g})dx$$

On peut maintenant faire le changement de variables $y = \frac{\sin x}{g}$, car l'application sin est un C^∞ difféomorphisme de $]\pi/2, \pi/2 + \varepsilon[$ sur $]\sin(\pi/2 + \varepsilon, 1[$. On obtient cettte fois

$$E(h(D)) = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{]\sin(\pi/2-\varepsilon)/g,1/g[} h(y)\frac{g}{\sqrt{1-gy^2}}dy\,,$$

et ceci étant vrai pour toute fonction h mesurable bornée, on en déduit la densité

$$f_D : y \mapsto \frac{1}{2\varepsilon}\frac{g}{\sqrt{1-gy^2}}\mathbf{1}_{]\frac{1}{g}\sin(\pi/2-\varepsilon),1/g[}(y)\,.$$

Corrigé 2. 1) Comme la densité définit une mesure de probabilité, de masse totale 1, on a $\int_{\mathbb{R}} cxe^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx = 1$, ce qui donne, par intégration par parties, $c = 1$.

2) Comme X et Y sont indépendantes, la loi du couple est le produit des lois. Autrement dit, le couple (X, Y) a pour densité la fonction

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto xe^{-x}ye^{-y}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,.$$

3) Soient $S = \frac{X+Y}{2}$ et $U = \frac{X-Y}{2}$, et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction test, i.e. une fonction mesurable bornée. Considérons la fonction $\Psi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$. C'est une application linéaire, donc C^∞, de Jacobien constant égal à $-1/2$, elle est donc bijective de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Sa restriction à $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur son image. Déterminons cette image $D = \Psi((\mathbb{R}_+^*)^2)$. On a

$$\begin{aligned} D &= \{(s, u) \in \mathbb{R}^2, s = \frac{x+y}{2}, u = \frac{x-y}{2},\ x \geq 0,\ y \geq O\} = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2, s + u = x \geq 0, s - u = y \geq 0\} \\ &= \{(s, u) \in \mathbb{R}^2, s \geq \max(u, -u)\} \end{aligned}$$

Cet ensemble est très facile à dessiner, il s'agit du domaine, de forme "triangulaire" (infinie), situé au dessus des deux droites d'équation $s = u$ et $s = -u$. Nous pouvons maintenant appliquer le théorème du changement de variables :

$$\begin{aligned} E(h(S, U)) &= E(h(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})) = \int_{\mathbb{R}^2} h(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})f(x, y)dxdy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty h(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})xye^{-(x+y)}dxdy = \int_D g(s, u)(s^2 - u^2)2e^{-2s}dsdu \end{aligned}$$

Ceci étant valable pour toute fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on en déduit que le couple (S, U) a pour densité $f_{(S,U)}$: $(s, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (s^2 - u^2)\mathbf{1}_D(s, u)2e^{-2s}$.

4) On calcule la densité marginale de S par

$$f_S(s) = \int_{]-s,s[} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s)(s^2 - u^2)2e^{-2s}du = e^{-2s}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(s) \times \frac{8}{3}s^3$$

De même, on a

$$f_U(u) = \int_{|u|}^{+\infty} (s^2 - u^2)2e^{-2s}ds = \cdots = (|u| + \frac{1}{2})e^{-2|u|}$$

On vérifie facilement que sur un ensemble de mesure positive, par exemple $\{(s, u) \in \mathbb{R}^2, s \geq 0, s < |u|\}$, on a $f_{(S,U)}(u, v) = 0$, alors que $f_S(s)f_U(u) \neq 0$, de sorte que $f_{(S,U)}(s, u) \neq f_S(s)f_U(u)$ et donc que S et U ne sont pas indépendantes.

Corrigé 3. Notons $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Cet ensemble est infini dénombrable (rappel : s'il était fini, considérer le produit de tous les nombres premiers $+1$, ce nombre est forcément premier, donc contradiction.)

1a) Pour tout $p_i \in \mathcal{P}$, on a $\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} > 1$. La suite de produits $\left(\Pi_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement croissante et supérieure à 1. Sa limite est finie si et seulement si la limite suivante est finie $\lim_{n\to\infty} \ln(\Pi_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = \lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^n \ln(1 - \frac{1}{p_i}) = -\sum_{n=1}^\infty \ln(1 - \frac{1}{p_i})$. Comme $\mathcal{P}$ est infini, $\lim_{i\to+\infty} p_i = +\infty$, et $\ln(1 - \frac{1}{p_i} \sim \frac{1}{p_i}$. La série ci-dessus converge donc ssi $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \infty$.

1b) Supposons $\lim_{n\to\infty} \Pi_{i=1}^n (1 - \frac{1}{p_i})^{-1} = \lambda < \infty$. Un développement en série entière donne $\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{p^k}$ pour tout $p \geq 2$ premier. On en déduit que

$$\Pi_{i=1}^n \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = (\sum_{k_1\geq 0} \frac{1}{p_1^{k_1}}) \ldots (\sum_{k_n=0}^n \frac{1}{p_n^{k_n}}) = \sum_{k_1\geq 0,\ldots,k_n\geq 0} \frac{1}{p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}}$$

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$. Il existe un entier $n(N) \leq N$ tel que les nombres premiers divisant l'un des entiers $1 \leq k \leq N$ soient des nombres de $\{p_1, \ldots, p_n\}$. Autrement dit, pour tout $1 \leq k \leq N$, il existe une unique écriture de k sous la forme $k = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n}$, avec $k_i \geq 0$. On en déduit immédiatement l'inégalité $\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \leq \Pi_{i=1}^{n(N)} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$ Si le produit $\Pi_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}$ convergeait vers une limite finie λ quand $n \to \infty$, ceci impliquerait la convergence de la série harmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$. D'où contradiction. Donc $\lim_{n\to\infty} \Pi_{i=1}^n \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}} = +\infty$, et d'après **1a)**, $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$.

2) Considérons $\mathbb{Z}$ muni de sa tribu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers multiples de n. Supposons qu'il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathbb{Z}$ tq $\mathbf{P}(n\mathbb{Z}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Alors $(pq)\mathbb{Z} = p\mathbb{Z} \cap q\mathbb{Z}$, d'où

$$\mathbf{P}((pq)\mathbb{Z}) = \frac{1}{pq} = \frac{1}{p}\frac{1}{q} = \mathbf{P}(p\mathbb{Z})\mathbf{P}(q\mathbb{Z})$$

Autrement dit, les événements $p\mathbb{Z}, p \in \mathcal{P}$, sont deux à deux indépendants. D'après le lemme de Borel Cantelli, comme $\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = +\infty$, on a $\mathbf{P}(\limsup_{p\to\infty} p\mathbb{Z}) = 1$. Donc presque surement, un entier est divisible par une infinité de nombres premiers. Le seul entier appartenant à tous les $p\mathbb{Z}$ est 0. Mais alors, on aurait $\mathbf{P}(\{0\}) = 1$, ce qui est impossible, car $0 \in 2\mathbb{Z}$, et $\mathbf{P}(2\mathbb{Z}) = \frac{1}{2}$. Il ne peut donc pas exister de telle mesure de probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathbb{Z}$.

Corrigé 4. 1 L'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, et même C^∞, impaire, tend vers 0 en $\pm\infty$. Elle est bornée (car continue et tendant vers 0 en l'infini). Sa dérivée vaut pour tout $u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}$.

2) Comme φ est continue bornée, l'application $\varphi(tX) : \omega \in \Omega \mapsto \varphi(tX(\omega))$ est mesurable bornée, donc $\mathbf{P}$-intégrable. Donc $\Phi_X(t) = \int_\Omega \varphi(tX(\omega))d\mathbf{P}(\omega)$ est bien définie. Elle est bornée par $\|\varphi\|_\infty$ car $|\Phi_X(t)| \leq \int_\Omega |\varphi(tX(\omega))|d\mathbf{P}(\omega) \leq \|\varphi\|_\infty$, et impaire par construction.

3) Supposons que X est une v.a. de Bernoulli de paramètre p. Elle vérifie donc $\mathbf{P}(X=0)=1-p$ et $\mathbf{P}(X=1)=p$. Pour tout réel $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\Phi_X(t)=\int_{\{\omega,X(\omega)=1\}}\varphi(t)d\mathbf{P}+\int_{\{\omega,X(\omega)=0\}}\varphi(0)d\mathbf{P}=p\varphi(t)+1-p=p\varphi(t)$$

Si X suit une loi uuniforme sur $[0,1]$, alors

$$\Phi_X(t)=\int_{[0,1]}\varphi(tx)dx=\int_0^1\frac{xt}{1+x^2t^2}dx=\frac{\log(1+t^2)}{2t}$$

(Cette fonction se prolongeant naturellement par 0 en $t=0$.

4a) Si X et Y ont même loi $\mathbf{P}_X=\mathbf{P}_Y$ sur $\mathbb{R}$, alors bien sûr, $E(\varphi(tX))=\int_{\mathbb{R}}\varphi(tx)d\mathbf{P}_X(x)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(ty)d\mathbf{P}_Y(y)=E(\varphi(tY))$ d'où $\Phi_X=\Phi_Y$.
4b) Si X est symétrique, X et $-X$ ont même loi, d'où $\Phi_{-X}=\Phi_X$. Mais $\Phi_{-X}(t)=E(\varphi(-tX))=\Phi_X(-t)=-\Phi_X(t)$ car Φ_X est impaire. autrement dit $\Phi_X=-\Phi_X$, soit encore $\Phi_X=0$.
4c) Jusqu'ici les constructions effectuées ressemblaient fortement à celles faites pour définir les fonctions caractéristiques. Mais la fonction Φ_X ne caractérise pas la loi $\mathbf{P}_X$ de X, contrairement à la fonction caractéristique ϕ_X de X. En effet, si X est une v.a. constante égale à 0, alors Φ_0 est constante égale à 0. Et si Y est une v.a. uniforme sur $[-1,1]$, donc symétrique, alors d'après 4b), $\Phi_Y=0$. Pourtant, $\mathbf{P}_X\neq\mathbf{P}_Y$.

5a) On applique le théorème de continuité sous le signe intégrale. La fonction $(t,x)\mapsto\varphi(tx)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Elle est bornée par $\|\phi\|_\infty$, indépendemment de $t\in\mathbb{R}$, donc uniformément -en t- majorée par une fonction intégrable, car constante égale à $\|\varphi\|_\infty$. Donc Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.
5b) Soit $t_n\to\pm\infty$. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $\varphi(t_nx)\to 0$. De plus, $|\varphi(t_nx)|\leq\|\varphi\|_\infty<\infty$. Donc le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique, et donne $\lim_{n\to\infty}\Phi_X(t_n)=0$. Ceci étant vrai pour toute suite t_n tendant vers l'infini, on a alors $\lim_{t\to\pm\infty}\Phi_X(t)=0$.

6a) Supposons X intégrable. Appliquons le théorème de dérivation sous le signe intégrale. D'abord, φ est C^1, et sa dérivée est continue bornée sur $\mathbb{R}$ (EXO : vérifiez le) et $\frac{\partial(\varphi(tx))}{\partial t}=x\varphi'(xt)$, de sorte que $|\frac{\partial(\varphi(tx))}{\partial t}|\leq\|\varphi'\|_\infty|x|$. On a majoré la dérivée uniformément en t par une fonction intégrable par hypothèse, de sorte que Φ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\Phi_X'(t)=\int_{\mathbb{R}}x\varphi'(tx)d\mathbf{P}_X(x)$.

6b) Soit $\alpha>0$, et supposons que $t\in[\alpha,+\infty[$. Remaruons que $x\varphi'(xt)=\frac{1}{t}\times\frac{tx(1-t^2x^2)}{(1+t^2x^2)^2}$, et que la fonction $u\mapsto\frac{u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, par une certaine constante K. Ainsi, $|\frac{\partial(\varphi(tx))}{\partial t}|\leq\frac{K}{\alpha}$. On peut alors appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale sur l'intervalle $[\alpha,+\infty[$. Le réel $\alpha>0$ étant arbitraire, Φ_X est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, puis sur $\mathbb{R}^*$ par parité.

6c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$n\Phi_X(\frac{1}{n})=nE(\frac{X/n}{1+X^2/n})=E(\frac{X}{1+\frac{X^2}{n}})$$

Comme la v.a. X est supposée positive, la suite $(\frac{X}{1+\frac{X^2}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ est croisante et positive, et converge vers X. Par le théorème de convergence monotone de Beppo Levi, on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi_X(1/n)-\Phi_X(0)}{1/n-0}=\lim_{n\to\infty}n\Phi_X(\frac{1}{n})=E(X)=+\infty\,.$$

Donc Φ_X n'est pas dérivable en 0 lorsque X est positive et non intégrable.