Université de Picardie Jules Verne | **Année 2006-2007**
Licence de Mathématiques L3 | **Probabilités**

Partiel de Probabilités - 27 mars 2007

Exercice 1 (Question de cours, 3 points). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire.
a) Donner la définition de la fonction de répartition de X.
b) Donner la définition de " la variable aléatoire X est à densité ".
c) Donner la définition de la fonction caractéristique de X.

Voir cours !

Exercice 2 (Probabilités élémentaires, 2 points). Parmi les élèves ayant obtenu leur Bac S en Francie en 2134, la proportion de garçons poursuivant des études universitaires est de 99%, alors que la proportion de filles poursuivant des études universitaires n'est que de 80%. Par ailleurs, il y a 40% de filles parmi ces élèves ayant obtenu leur Bac S. Quelle est la proportion de filles parmi les nouveaux étudiants ?

C'est un exemple typique d'application de la formule de Bayes. On appelle Ω l'ensemble des éleves ayant obtenu leur bac S, $F \subset \Omega$ l'ensemble des filles, $U \subset \Omega$ l'ensemble des étudiants poursuivant des études universitaires. On munit Ω de la tribu des parties de Ω et de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. L'énoncé se traduit par $\mathbb{P}(U|F) = 0,8$, $\mathbb{P}(F) = 0,4$, $\mathbb{P}(U|F^c) = 0,99$. La formule de Bayes donne

$$P(F|U) = \frac{P(U|F)P(F)}{P(U|F)P(F) + P(U|F^c)P(F^c)} = \frac{0,8 \times 0,4}{0,8 \times 0,4 + 0,99 \times 0,6} \simeq$$

Exercice 3 (Loi Gamma, 11 points). On appelle loi Gamma $\mathcal{G}(a, \lambda)$ de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$ la loi de densité

$$h_{a,\lambda}(x) = 1_{\mathbb{R}_+}(x) \frac{1}{\Gamma(a)} \lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x} .$$

1) Étude de la fonction Γ (3 pts) On définit $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{a-1} dx$.
a) Vérifier que si $a > 0$, Γ est bien définie, puis vérifier que si $a > 0$ et $\lambda = 1$, la fonction $h_{a,1}$ est une densité de probabilité.
b) Montrer que $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$.
c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n - 1)!$ (avec la convention $0! = 1$).
d) Calculer $\Gamma(1/2)$.

2) Étude de la loi $\mathcal{G}(a, \lambda)$ (4,5 points)
a) Reconnaître cette loi lorsque $a = 1$.
b) Soit Z une va de loi $\mathcal{G}(a, 1)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $X = Z/\lambda$?
c) Calculez l'espérance et la variance de Z et de $\mathcal{G}(a, \lambda)$.

3) (3,5 points) Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(a, \lambda)$ et Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(b, \lambda)$. On suppose que X et Y sont indépendantes.
a) Quelle est la loi du couple (X, Y) ? (On précisera sa densité s'il en a une.)
b) Quelle est la loi du couple $(X + Y, Y)$?
c) En déduire la loi de $X + Y$.

1) La fonction $x \mapsto e^{-x} x^{a-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc mesurable. Elle est intégrable en $+\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et intégrable au voisinage de 0 dès que $a - 1 > -1$, soit $a > 0$. Une intégration par parties donne $\Gamma(a + 1) = a\Gamma(a)$ pour tout $a > 0$. Un calcul immédiat donne $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$. Par récurrence, en utilisant (b), on obtient $\Gamma(n + 1) = n!$. Pour finir, on calcule $\Gamma(1/2)$ par changement de variables. En effet, $\Gamma(1/2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2} dy$ par le changement de variables $y = \sqrt{2x}$. Et cette dernière intégrale vaut $\sqrt{2\pi}/2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, puisqu'à une constante près, c'est l'intégrale de la densité d'une loi normale centrée réduite.

2) Lorsque $a = 1$, on reconnait une loi exponentielle de paramètre λ. On calcule la fonction de répartition de X par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Z \leq \lambda x) = F_Z(\lambda x)$. Comme Z suit une loi $\mathcal{G}(a, 1)$, sa densité est continue sur $\mathbb{R}^*$. Sa fonction de répartition est donc C^1 sur $\mathbb{R}^*$, donc F_X aussi. On en déduit que X est à densité et que $f_X(x) = (F_X)'(x) = \lambda f_Z(\lambda x) = \lambda h_{a,1}(\lambda x) = h_{a,\lambda}(x)$. Autrement dit, X suit une loi $\mathcal{G}(a, \lambda)$.

On calcule ensuite $E(Z) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(a)} x^a e^{-x} dx$. Une intégration par parties donne $E(Z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} a x^{a-1} e^{-x} dx = a \int_{\mathbb{R}} h_{a,1}(x) dx = a$. On en déduit immédiatement que $E(X) = E(\frac{Z}{\lambda}) = \frac{a}{\lambda}$.

Calculons maintenant $E(Z^2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(a)} x^{a+1} e^{-x} dx$. Deux intégrations par parties successives donnent cette fois $E(Z^2) = a(a+1) \int_{\mathbb{R}} h_{a,1}(x) dx = a(a+1)$. D'où $Var(Z) = a(a+1) - a^2 = a$. On en déduit $E(X^2) = \frac{a(a+1}{\lambda^2}$; puis $Var(X) = Var(\frac{Z}{\lambda}) = \frac{a}{\lambda^2}$.

3) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et à densité, donc (X, Y) est à densité et $f_{(X,Y)}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \lambda^{a+b} x^{a-1} y^{b-1} e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}$. Introduisons l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (x + y, y)$. C'est un isomorphisme linéaire (de déterminant 1). C'est donc en particulier un C^1-difféomorphisme (de Jacobien constant égal à 1), et on va pouvoir utiliser le théorème de changement de variables. Plus précisément, soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Alors

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g(x,y)dP_{(X+Y,Y)}(x,y) &= \int_\Omega g(X(\omega)+Y(\omega),Y(\omega))dP(\omega) = \int_\Omega g\circ\varphi(X(\omega),Y(\omega))dP(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} g\circ\varphi(x,y)dP_{(X,Y)}(\omega) = \int_{(\mathbb{R}_+)^2} g\circ\varphi(x,y)f_X(x)f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{(\mathbb{R}_+)^2} g(z,y)f_X(z-y)f_Y(y)dzdy \text{ (chang de variables)}
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour toute fonction mesurable bornée g on en déduit que le couple $(X+Y,Y)$ est à densité et que sa densité vaut

$$f_{(X+Y,Y)}(z,y) = f_X(z-y)f_Y(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z-y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(z-y)^{a-1}y^{b-1}e^{-\lambda z}.$$

La densité de $X+Y$ se calcule ensuite comme densité marginale du couple $(X+Y,Y)$, soit encore

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z-y)\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}(z-y)^{a-1}y^{b-1}e^{-\lambda z}dy = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z)e^{-\lambda z}\int_0^z (z-y)^{a-1}y^{b-1}dy$$

On utilise alors l'indication de l'énoncé : $\int_0^z (z-y)^{a-1}y^{b-1}dy = z^{a+b-1}\int_0^1(1-u)^{a-1}u^{b-1}du = z^{a+b-1}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

On en déduit que $f_{X+Y}(z) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z)\dfrac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)}z^{a+b-1}e^{-\lambda z}$. Autrement dit, $X+Y$ suit une loi $\Gamma(a+b)$.

Exercice 4 (6 points). Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
a) Donner la densité d'une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.
b) Montrer que le couple (X,Y) est à densité et préciser celle-ci.
c) On définit les variables aléatoires $U = X+Y$ et $V = \frac{X}{Y}$. Quelle est la loi du couple (U,V) ? (On précisera sa densité.)
d) Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
e) Calculer $E(U)$ et $Var(U)$, $E(V)$ et $Var(V)$.

La densité de la loi $\mathcal{E}(1)$ est $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)e^{-x}$. Les v.a. X et Y sont indépendantes et à densité, donc d'après le cours, le couple (X,Y) est à densité et cette densité vérifie pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Soit $\varphi(x,y) = (x+y,\frac{x}{y})$. C'est une application C^1 de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Son jacobien vaut $J\varphi(x,y) = -\frac{x+y}{y^2}$. Il est non nul lorsque $x>0$ et $y>0$. Donc φ est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ sur son image. L'énoncé nous suggère de considérer ψ. On vérifie aisément que $\psi\circ\varphi(x,y) = (x,y)$. Ainsi $\psi : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to (\mathbb{R}_+^*)^2$ est l'inverse deφ. Donc φ est un C^1 difféomorphisme de $(R_+^*)^2$ sur $(R_+^*)^2$.

Nous allons utiliser le changement de variables pour trouver la densité du couple (U,V). Soit g une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$E(g(U,V)) = \int_\Omega g(U(\omega,V(\omega)))d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega (g\circ\varphi)(X(\omega,Y(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \int_{(R_+^*)^2}(g\circ\varphi)(x,y)e^{-x}e^{-y}dxdy$$

(On peut restreindre l'intégrale à $\mathbb{R}_+^*)^2$ car X et Y sont à valeurs positives.) Le théorème du changement de variable donne

$$\int_{(R_+^*)^2}(g\circ\varphi)(x,y)e^{-x}e^{-y}dxdy = \int_{(R_+^*)^2} g(u,v)e^{-(uv)/(1+v)}e^{-u/(1+v)}|Jac(\psi)(u,v)|dudv$$

avec $Jac\psi(u,;v) = -u/(1+v)^2$. Ceci étant vrai pour toute fonction mesurable bornée g, on en déduit que (U,V) est à densité, et que $f_{U,V}(u,v) = \mathbf{1}_{(\mathbb{R}_+^*)^2}(u,v)e^{-u}\frac{u}{(1+v)^2}$. Un calcul rapide donne $f_U(u) = 1_{R_+^*}(u)ue^{-u}$ et $f_V(v) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(v)\frac{1}{(1+v)^2}$. On remarque que pour tous $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, $f_{(U,V)}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$. D'après le cours on en déduit que U et V sont indépendantes.

On calcule $E(U) = \int_{\mathbb{R}_+} u^2e^{-u}du = 2$ (intégrations par parties). $E(U^2) = \int_{\mathbb{R}_+} u^3e^{-u}du = 6$, donc $Var(U) = E(U^2) - E(U)^2 = 2$. De même, $E(V) = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{v}{(1+v)^2}dv$. Cette intgrale vaut $+\infty$. Autrement dit, V n'est pas intégrable, donc $E(V) = +\infty$ et $Var(V)$ n'est pas définie.