Université de Picardie Jules Verne **Année 2008-2009**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Corrigé du partiel - 18 Mars 2009

Question de cours (3 points)
Soit X une variable aléatoire définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, où $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu borélienne.
1. Rappeler ce qu'est la densité de X, lorsqu'elle existe.
2. Démontrer le résultat du cours suivant : X admet la fonction mesurable positive f pour densité si et seulement si pour toute fonction mesurable bornée h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} h(x) d\mathbf{P}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f(x) dx \,.$$

Corrigé Voir cours.

Exercice 1. (2 points) Un représentant de commerce vendant des panneaux solaires visite un nombre aléatoire N de clients chaque jour. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité qu'un client visité achète un panneau solaire est $p \in]0, 1[$, et est indépendante des décisions des autres clients. Soit Y le nombre de panneaux solaires vendus en une journée.
1. Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = k|N = n)$, i.e. la probabilité que parmi n clients visités, k clients exactement achètent un panneau solaire, est une loi binomiale que l'on précisera.
2. En déduire la loi de Y, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$ calculer la probabilité $\mathbf{P}(Y = k)$.
3. Donner la loi conditionnelle de N sachant que $Y = k$. Vérifier qu'il s'agit d'une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Corrigé 1. À n fixé, on est ramenés à calculer la probabilité que k clients exactement sur n achètent un panneau solaire. Les clients se comportant de manière indépendante les uns des autres, et achetant leurs panneaux avec probabilité p, cette probabilité vaut $\mathbf{P}(Y = k|N = n) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, c'est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, i.e. c'est la même probabilité que celle de tirer k boules rouges lors d'un tirage avec remise de n boules dans une urne contenant une proportion p de boules rouges.
2. La formule des probabilités totales (et le fait que si $k > n$, $\mathbf{P}(Y = k|N = n) = 0$) donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = k) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(Y = k|N = n)\mathbf{P}(N = n) = \sum_{n=k}^{\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m (1-p)^m}{m!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} = e^{-(\lambda p)} \frac{(\lambda p)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une loi de Poisson de paramètre λp. **3.** Si $n < k$, on a $\mathbf{P}(N = n|Y = k) = 0$. Sinon, on calcule $\mathbf{P}(N = n|Y = k) = \mathbf{P}(Y = k|N = n) \frac{\mathbf{P}(N=n)}{\mathbf{P}(Y=k)} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{e^{\lambda p} k!}{(\lambda p)^k} = \cdots = \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}$ Autrement dit il s'agit d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda(1-p)$, au décalage près (c'est $\mathbf{P}(N = n+k|Y = k)$ la loi de Poisson).

Exercice 2. (2 points) Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de fonction de répartition F_X et de densité f_X continue. Montrer que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité, et donner sa fonction de répartition et sa densité en fonction de celles de X, par la méthode de votre choix.

Corrigé Montrons cela par le calcul de la fonction de répartition. Si $y < 0$, alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(|X| \leq y) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega, |X(\omega)| = 0\}) = 0$ bien sûr. Si $y \geq 0$, alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(|X| \leq y) = \mathbf{P}(-x \leq X \leq x) = F_X(x) - F_X(-x^-)$. Comme X est à densité continue, sa fonction de répartition est C^1 (et donc continue), d'où $F_X(-x^-) = F_X(-x)$, et finalement $F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y)$ pour $y \geq 0$. Finalement, en dehors de 0, F_Y est C^1 comme composée de fonctions C^1. La variable aléatoire Y est donc à densité, avec $f_Y(y) = 0$ pour $y < 0$ et $f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y)$ si $y > 0$.

Exercice 3. (3 points)
1. À quelle(s) condition(s) une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est-elle la fonction de répartition d'une loi de probabilité.

Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $F(x) = C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \mathbf{1}_{[2k,+\infty[}(x)$.
2. À quelle(s) condition(s) sur C la fonction F est-elle la fonction de répartition d'une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$?
3. Lorsque cette condition est réalisée, explicitez cette mesure de probabilité.
4. Calculer la probabilité des ensembles $\{0\}$, $[2, 8]$, $[0, 2[$, $[3, +\infty[$, $]4, 9[$, $]-2, -1]$.

Corrigé 1. Une fonction est une fonction de répartition si et seulement si elle est croissante, à valeurs dans $[0, 1]$, a pour limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, et est continue à droite en tout point.
2. La fonction F a pour limite 0 en $-\infty$ car elle vaut 0 sur $\mathbb{R}_-^*$. Elle est croissante si et seulement si $C > 0$, et décroissante sinon, comme somme de fonctions croissantes si $C > 0$, et décroissantes sinon. Elle a pour limite $C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{3C}{2}$ en $+\infty$; cette limite vaut 1 ssi $C = \frac{2}{3}$. Elle est continue à droite en tout point, car elle s'écrit comme somme normalement convergente de fonctions continues à droite (cf TD feuille 2).
En résumé, c'est une fonction de répartition ssi $C = \frac{2}{3}$.
3. Lorsque cette condition est réalisée, la probabilité $\mathbf{P} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \delta_{2k}$ a pour fonction de répartition F. En effet, c'est

bien une probabilité (c'est une mesure comme somme de mesures, et c'est une probabilité d'après le calcul ci-dessus). De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{P}(]-\infty, x]) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\delta_{2k}(]-\infty, x]) = \frac{2}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}\mathbf{1}_{2k\leq x} = F(x)\,.$$

4. $\mathbf{P}(\{0\}) = 2/3$. $\mathbf{P}([2,8]) = F(8) - F(2^-) = 1 - \frac{1}{3^5} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^5}$. $\mathbf{P}([0,2[) = F(2^-) - F(0^-) = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$. $\mathbf{P}([3,+\infty[= 1 - F(3^-) = 1 - \frac{8}{9}$ $\mathbf{P}(]4,9[) = F(9^-) - F(4) = \sum_{k=3}^{4}\frac{1}{3^k}\frac{2}{3} = \frac{2}{3^4}(\frac{1}{3}+1) = \frac{8}{3^5}$. $\mathbf{P}(]-2,-1]) = 0 - 0 = 0$.

Exercice 4. (10 points) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, de lois notées $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, et de densités respectives f_X et f_Y. On note $Z = (X,Y)$ le couple (X,Y) à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Le couple $Z = (X,Y)$ est dit *à densité*, s'il existe une fonction mesurable positive $f_Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, telle que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on ait

$$\mathbf{P}((X,Y) \in A) = \int_A f(x,y)dxdy\,.$$

On pourra admettre des résultats de questions intermédiaires pour continuer l'exercice, à condition de le mentionner clairement.

1. On suppose que X et Y sont *indépendantes*, c'est-à-dire *par définition* que pour tous boréliens A et B de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbf{P}(X \in A \text{ et } Y \in B) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)\,, \text{ soit encore}$$
$$\mathbf{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbf{P}_X(A)\mathbf{P}_Y(B)\,.$$

1.a. Vérifier qu'alors la loi $\mathbf{P}_{(X,Y)}$ du couple (X,Y) est la loi produit $\mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y$.
1.b. Montrer que le couple (X,Y) a pour densité la fonction

$$f : (x,y) \mapsto f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)\,.$$

2. Réciproquement, on suppose maintenant que le couple (X,Y) a pour densité $f : (x,y) \mapsto f_X(x)f_Y(y)$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

3. On suppose toujours que X et Y sont indépendantes. On suppose aussi que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que Y suit une loi uniforme sur $]0, 2\pi[$.
3.a. Donner la *densité*, la *fonction de répartition*, la *fonction caractéristique*, l'*espérance* et la *variance* des variables aléatoires X et Y.
3.b. Calculer la densité du couple (X,Y).
3.c. Soient $U = \sqrt{X}\sin Y$ et $V = \sqrt{X}\cos Y$. Calculer la densité du couple (U,V), en justifiant son existence.
3.d. Calculer les densités marginales de U et V.
3.e. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Corrigé

1.a. Par construction, la loi produit de $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$ sur la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est l'unique mesure de probabilité vérifiant pour tous $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$,

$$\mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y(A \times B) = \mathbf{P}_X(A)\mathbf{P}_X(B)\,.$$

Autrement dit, si X et Y sont indépendantes, par définition,

$$\mathbf{P}_{(X,Y)}(A \times B) = \mathbf{P}_X(A)\mathbf{P}_X(B) = \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y(A \times B)$$

pour tout $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$, d'où $\mathbf{P}_{(X,Y)} = \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y$ par unicité de la mesure produit.
1.b Si $\mathbf{P}_{(X,Y)} = \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y$, alors pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on a, en utilisant successivement Tonelli, puis le fait que X et Y sont à densité, puis encore Tonelli,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(X,Y)}(C) &= \mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y(C) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_C(x,y)d\mathbf{P}_X \otimes \mathbf{P}_Y(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_C(x,y)d\mathbf{P}_X(x)d\mathbf{P}_Y(y)\\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_C(x,y)d\mathbf{P}_X(x)\right)d\mathbf{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_C(x,y)f_X(x)dx\right)f_Y(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_C(x,y)f_X(x)f_Y(y)dxdy\end{aligned}$$

Donc le couple (X,Y) a pour densité $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f_X(x)f_Y(y)$.
2. Réciproquement, si (X,Y) a pour densité la fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f_X(x)f_Y(y)$, alors pour tout $(A,B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^2$, on a (par Tonelli)

$$\mathbf{P}(X \in A,\ Y \in B) = \int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{1}_{A\times B}(x,y)f_X(x)f_Y(y)dxdy = \left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_A(x)f_X(x)dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}}\mathbf{1}_B(y)f_Y(y)dy\right) = \mathbf{P}(X \in A)\mathbf{P}(Y \in B)$$

3.a. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{2}$, sa densité est $f_X : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{2}e^{-x/2}$, sa fonction de répartition vaut $F_X(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)(1-e^{-x/2})$, son espérance $E(X) = 2$, et sa variance $Var(X) = 4$. Sa fonction caractéristique vaut

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}f_X(x)dx = \int_{\mathbb{R}_+}\frac{1}{2}e^{(it-1/2)x}dx = \frac{1}{1-2it}\,.$$

La v.a. Y a pour densité $f_Y : y \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,2\pi[}(y)\frac{1}{2\pi}$. Sa fonction de répartition F_Y vaut 0 sur $\mathbb{R}_-$, $F_Y(x) = \frac{x}{2\pi}$ sur $]0, 2\pi[$ et 1 sur $[2\pi, +\infty[$. Son espérance vaut $E(Y) = \pi$ et sa variance $Var(Y) = \frac{4\pi^2}{12}$. Sa fonction caractéristique vaut $\phi_Y(t) = E(e^{itY}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ity}dy = \frac{e^{2i\pi t}-1}{2i\pi t} = \frac{e^{i\pi t}}{\pi t}sin\pi t$.
3.b. Comme X et Y sont indépendantes, d'après la première question, le couple (X,Y) a pour densité $f : (x,y) \mapsto f_X(x)f_Y(y) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\frac{1}{2}e^{-x/2}\frac{1}{2\pi}\mathbf{1}_{]0,2\pi[}(y)$.

3.c Soit $\Psi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ l'application de classe C^1 définie par $\Psi(x, y) = (\sqrt{x}\sin y, \sqrt{x}\cos y)$. Ψ est injective et un calcul immédiat donne $|Jac\Psi(x, y)| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \neq 0$, de sorte que Ψ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[$ sur son image.

Vérifions que son image est $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (i.e. $\Psi : \mathbb{R}_+^* \times]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est surjective). Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Posons $x = \sqrt{u^2 + v^2}$. Si $u \geq 0$, posons $y = \arccos(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}) \in]0, \pi[$ et si $u \leq 0$, posons $y = 2\pi - \arccos(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}})$. Il est facile de vérifier que $\Psi(x, y) = (u, v)$ de sorte que l'image de Ψ est bien $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Cherchons maintenant la densité de (U, V). Soit $h : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Alors par changement de variable, on a

$$E(h(U, V)) = E(h(\varphi(X, Y)) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[} h \circ \varphi(x, y) \frac{1}{4\pi} e^{-x/2} dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} h(u, v) \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2} dudv$$

d'où (U, V) a pour densité $f_{(U,V)}(u, v) = \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}$.

3.d Par définition, la densité marginale de U vaut

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}} f_{(U,V)}(u, v) dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$$

Le même calcul donne $f_V(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2}$. Autrement dit, U et V suivent des lois normales centrées réduites.

3.e. On utilise la question 2. On remarque que $f_{(U,V)}(u, v) = f_U(u) f_V(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que U et V sont indépendantes.