Université Picardie Jules Verne
Licence 3 Semestre 6

Faculté de Mathématiques et Informatique
« Méthodes expérimentales » 2006

Corrigé de l'examen 2ème session de probabilités - 7 septembre 2006

Question de cours (3 points) : Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-1,1]$. Soit $\varphi : x \mapsto \cosh(x)$. Énoncer le théorème de changement de variable dans ce cadre, donner la densité de la loi de X, puis celle de $Y = \varphi(X)$.

CORRIGE On appelle $U_1 =]-1,0[$ et $U_2 =]0,1[$. Soit φ_i, $i = 1,2$ la restriction de φ à U_i. C'est un difféomorphisme de U_i dans $]1,\cosh(1)[$. On a donc $\varphi_1^{-1}(x) = -\text{argch}\,(x)$ et $\varphi_2^{-1}(x) = \text{argch}\,(x)$, donc $(\varphi_1^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\varphi_2^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. Le théorème de changement de variable nous permet alors de relier les densités de X et de $Y = \varphi(X)$. On a

$$f_Y(y) = f_X(\varphi_1^{-1}(y))\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + f_X(\varphi_2^{-1}(y))\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{1}_{[-1,1]}(\text{argch}\,y) + \mathbf{1}_{[-1,1]}(-\text{argch}\,y)\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Exercice I ($\simeq$ 6 points) Soit $(\lambda_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs. Pour tout entier n, on désigne par P_n la loi exponentielle de paramètre λ_n, c'est-à-dire la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de densité $x \mapsto \lambda_n \exp(-\lambda_n x)\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Donner une expression de la fonction caractéristique φ_n de P_n. Montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}1$, $Re(\varphi_n(t)) = 1 - \dfrac{t^2}{\lambda_n^2 + t^2}$.

2. Montrer que si la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un nombre réel strictement positif λ, alors $(P_n)_n$ converge étroitement.

3. On suppose que $(P_n)_n$ converge étroitement vers une mesure de probabilité Q, de fonction caractéristique φ.

3 a) Montrer que si $Q = \delta_0$ alors la suite $(\lambda_n)_n$ tend vers $+\infty$.

On suppose maintenant que $Q \neq \delta_0$.

3 b) Montrer qu'il existe un réel $t_0 \neq 0$ tel que $Re(\varphi(t_0)) < 1$. En déduire que la suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un nombre réel $\lambda \geq 0$.

3 c) Conclure en remarquant que λ ne peut pas être nul.

Corrigé :

1. On calcule $\varphi_n(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \lambda_n e^{-\lambda_n x} e^{itx}\,dx = \frac{-\lambda_n}{it - \lambda_n}$. On en déduit que $Re\varphi_n(t) = \dfrac{\lambda_n^2}{t^2+\lambda_n^2} = 1 - \dfrac{t^2}{\lambda_n^2 + t^2}$.

2. Si $\lambda_n \to \lambda > 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_n(t) \to 1 - \frac{t^2}{t^2+\lambda^2}$ qui est la fonction caractéristique d'une loi exponentielle de paramètre λ. Autrement dit, P_n converge étroitement vers une loi exponentielle.

3 a) Si $Q = \delta_0$, un calcul immédiat montre que sa fonction caractéristique est constante : $\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} d\delta_0(x) = 1$. Si P_n converge étroitement vers Q, alors φ_n converge simplement vers φ. En particulier $Re\,\varphi_n(t) \to 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Vue l'expression de $Re\,\varphi_n(t) = 1 - \frac{t^2}{\lambda_n^2+t^2}$, ceci implique que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t^2}{\lambda_n^2+t^2} \to 0$, soit encore $\lambda_n^2 \to +\infty$. Comme $\lambda_n \geq 0$, ceci équivaut à $\lambda_n \to +\infty$.

3 b Si $Q \neq \delta_0$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t_0) \neq 1$. Comme toute fonction caractéristique, φ vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$ $|\varphi(t)| \leq 1$. Ceci implique que $Re\,\varphi(t_0) < 1$ (faire un dessin). On en déduit que $1 - \frac{t_0^2}{\lambda_n^2+t_0^2} \to Re\,\varphi(t_0) < 1$, puis que λ_n^2 tend vers une limite finie. Comme les λ_n sont strictement positifs, ceci implique que λ_n converge vers $\lambda \geq 0$.

3c Dans le cas ci-dessus, λ ne peut pas être nul. En effet, sinon, on aurait $\varphi(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$, et $\varphi(0) = 1$. Or une fonction caractéristique est continue, d'où contradiction. Autrement dit, $\lambda_n \to \lambda > 0$. On est donc dans la situation de la question 2.

En résumé, si P_n converge étroitement, soit elle converge vers δ_0 (lorsque $\lambda_n \to \infty$); soit elle converge vers une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ lorsque λ_n converge vers une limite $\lambda > 0$.

Exercice II ($\simeq$ 9 points) : Soit (X,Y) un couple aléatoire dont la loi admet la densité :

$$(x,y) \mapsto e^{-(x+y)}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$.

1. Déterminer les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

2. a. Calculer (la densité de) la loi du couple $W = (X - Y, Y)$, puis en déduire que celle de $Z = X - Y$ appelée **loi de Laplace**, est

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}\,.$$

2.b. Calculer l'espérance, la variance, et l'écart-type d'une variable aléatoire suivant une loi de Laplace.

2.c. Donner la fonction de répartition d'une loi de Laplace.

3. Montrer que la fonction caractéristique d'une loi de Laplace est donnée par $t \mapsto (1+t^2)^{-1}$.

CORRIGÉ **1.** La densité de X est la densité marginale $f_X(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \cdots = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)e^{-x}$. Par symétrie, on a $f_Y = f_X$. Et on constate aisément que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Les v.a. X et Y sont donc indépendantes.

2 a. On effectue le changement de variable $\psi(x,y) = (x-y,y)$. C'est un difféomorphisme (linéaire) de jacobien égal à 1. On obtient $f_W(z,y) = f_X(z+y)f_Y(y)$ puis (en calculant la densité marginale) on obtient $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}_+^*} 1_{\mathbb{R}_+^*}(z+y)e^{-(z+y)}e^{-y}dy = e^{-z}\int_0^{+\infty} e^{-2y}1_{\mathbb{R}_+^*}(z+y)dy$. Si $z \geq 0$, on trouve $f_Z(z) = \frac{e^{-z}}{2}$ et si $z < 0$, $f_Z(z) = \int_{-z}^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{e^z}{2}$. En résumé, on obtient bien $f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}$

2b) Des calculs élémentaires donnent $E(Z) = 0$, $Var(Z) = 2$ et $\sigma = \sqrt{2}$.

2c) Par définition, la fonction de répartition est $F_Z(z) = \int_{-\infty}^z f_Z(u)du$. Si $z < 0$, on en déduit que $F_Z(z) = \frac{e^Z}{2}$ et si $z \geq 0$, $F_Z(z) = 1 - \frac{e^{-z}}{2}$.

3)Par définition,

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^*} e^{itx-x}dx + \frac{1}{2}\int_{R_-^*} e^{itx+x}dx \\
&= \int_{R_+^*} e^{-x}\frac{e^{itx}+e^{-itx}}{2}\,dx = \int_{\mathbb{R}_+^*} \cos(tx)e^{-x}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Deux intégrations par parties successives donnent alors $\varphi_Z(t) = 1 - t^2\varphi_Z(t)$, d'où le résultat.

Exercice III (**$\simeq$ 6 points**) Dans cet exercice, chaque question peut se faire en admettant les résultats des questions précédentes. Soit $\Omega = [0,1[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne, et P la mesure de Lebesgue sur Ω. Le but de cet exercice est de montrer que P-presque tout nombre de $[0,1[$ est « normal », c'est-à-dire qu'il a autant de 0 que de 1 dans son développement binaire. Nous allons formaliser et démontrer cet énoncé à l'aide des questions suivantes.

Préliminaires : Si $\omega \in \Omega$, son développement binaire est une suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\omega = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\omega_i}{2^i}$. En général, cette suite est unique, sauf lorsqu'elle se termine par une infinité de 0 ou une infinité de 1. On **ADMET** *que chaque nombre $\omega \in \Omega = [0,1[$ a un unique développement $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne se termine pas par une infinité de 1. On pourra utiliser le fait que ce développement vérifie toujours pour tout $n \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{2^i} \leq \omega < \sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$. L'explication est la suivante. Si un nombre a pour développement* 01101010**0**1111111111....., *il a aussi pour développement* 01101011**1**0000000000...... *(Pensez à l'écriture décimale, dans laquelle* 0,99999.... = 1,00000...*) Autrement dit, si le développement binaire d'un nombre ω se termine par une infinité de 1 à partir d'un certain rang $n \geq 2$, ω s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-2}\frac{\omega_i}{2^i} + \frac{0}{2^{n-1}} + \sum_{i=n}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{n-2}\frac{\omega_i}{2^i} + \frac{1}{2^{n-1}}\,,$$

c'est-à-dire qu'on peut remplacer le dernier 0 par un 1, et l'infinité de 1 par une infinité de 0.

1. On appelle ξ_i, $i \geq 1$, la fonction qui à un nombre $\omega \in \Omega$ associe le i-ième coefficient dans son développement binaire.

1 a. Montrer que si $\xi_1(\omega) = 0$, alors $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$ et si $\xi_1(\omega) = 1$, alors $\omega \geq \frac{1}{2}$.

En déduire qu'en fait $\xi_1(\omega) = 0$ si et seulement si $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$ et $\xi_1(\omega) = 1$ si et seulement si $\omega \geq \frac{1}{2}$.

1 b. En déduire que ξ_1 est mesurable de $(\Omega = [0,1[, \mathcal{B})$ dans $\{0,1\}$ muni de la tribu $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \{\{0\},\{1\},\{0,1\},\emptyset\}$.

1 c. Calculer la loi de ξ_1, c'est-à-dire les valeurs $P(\{\xi_1 = 1\})$, $P(\{\xi_1 = 0\})$. (On rappelle que P est la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$.)

2 a. Plus généralement, montrer que si $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$, alors

$$\{\omega \in \Omega, \xi_1(\omega) = x_1 \quad \text{et} \quad \xi_2(\omega) = x_2 \dots \xi_n(\omega) = x_n\} \subset [\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[.$$

En utilisant le fait que ces intervalles sont deux à deux disjoints, montrer que cette inclusion est une égalité.

2 b. En déduire que les ξ_n sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{B})$ dans $(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$.

3 a. Montrer que $P(\{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = x_1 \text{ et } \xi_2(\omega) = x_2 \ \dots \text{ et } \xi_n(\omega) = x_n\}) = \dfrac{1}{2^n}$.

3 b. En utilisant le fait que $\{\omega \in \Omega,\ \xi_n(\omega) = x_n\} = \sqcup_{(x_1, \dots x_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} \{\omega \in \Omega,\ \xi_1(\omega) = x_1, \dots, \xi_{n-1}(\omega) = x_{n_1}\}$, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $P(\xi_n = 0) = P(\xi_n = 1) = \dfrac{1}{2}$.

3 c. À l'aide des questions précédentes, montrer que les (ξ_n) sont indépendantes.

4 a. Montrer que pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \to \frac{1}{2} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty .$$

4 b. Faire le lien avec l'affirmation du début de l'énoncé.

Corrigé 1 a. Si $\xi_1(\omega) = 0$ alors $\omega = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$. Si $\xi_1(\omega) = 1$, alors $\omega = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i} \geq \frac{\omega_1}{2} = \frac{1}{2}$. Réciproquement si $\omega \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $\xi_1(\omega) = 0$ puisque $\xi_1(\omega) = 1$ impliquerait $\omega > 1/2$. D'où l'équivalence.

1 b. Il suffit de montrer que l'image réciproque d'un élément de $\mathcal{P}(\{0,1\})$ est un borélien. On a bien sûr $\xi_1^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $\xi_1^{-1}(\{0,1\}) = \Omega$. La question précédente donne $\xi_1^{-1}(0) = [0, 1/2[$ qui est un intervalle, donc borélien, et $\xi_1^{-1}(1) = [1/2, 1[$, encore borélien. Donc ξ_1 est mesurable.

1 c. $P(\xi_1 = 1) = P(\omega \in [1/2, 1[) = \frac{1}{2}$ puisque P est la mesure de Lebesgue. De même, $P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$. On calcule alors $E(\xi_1) = 1.\frac{1}{2} + 0.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

2 a. On a toujours

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i(\omega)}{2^i} \leq \omega = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\xi_i(\omega)}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i(\omega)}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} .$$

En particulier, si $\omega \in E(x_1, \dots, x_n)$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \leq \omega < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$. Autrement dit, l'inclusion est démontrée.

Montrons maintenant que cette inclusion est une égalité. Notons $x'_1 = \xi_1(\omega)$, ..., $x'_n = \xi_n(\omega)$. Si $\omega \notin E(x_1, \dots, x_n)$, alors $(x'_1, \dots, x'_n) \neq (x_1, \dots, x_n)$. D'après ci-dessus, $\omega \in E(x'_1, \dots, x'_n) \subset [\frac{x'_1}{2} + \dots + \frac{x'_n}{2^n}, \frac{x'_1}{2} + \dots + \frac{x'_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[$, et cet intervalle est disjoint de $[\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[$. On a donc montré que $\omega \in E(x_1, \dots x_n)$ si et seulement si $\omega \in [\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[$.

2 b D'après ce qui précède, $\xi_n^{-1}(0)) = \sqcup_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}} [\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}[$. C'est une union finie d'intervalles, c'est donc un borélien. Le raisonnement est le même pour $\xi_n^{-1}(1)$ qui est l'union finie de tous les intervalles de la forme $[\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}[$, donc borélien. Donc ξ_n est mesurable.

3 a. P est la mesure de Lebesgue, donc d'apès la question 2a $P(\{\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n\}) = P([\frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n}, \frac{x_1}{2} + \dots + \frac{x_n}{2^n} + \frac{1}{2^n}[) = \frac{1}{2^n}$.

3 b. L'ensemble $\{\xi_n = x_n\}$ est l'union disjointe de 2^{n-1} intervalles de longueur $\frac{1}{2^n}$, il est donc de mesure $2^{n-1}.\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}$.

3 c. On en déduit que pour tout $n \geq 1$ et tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n$, on a

$$P(\xi_1 = x_1, \dots, \xi_n = x_n) = \frac{1}{2^n} = \Pi_{i=1}^{n} P(\xi_i = x_i)$$

Donc les ξ_i sont indépendantes.

4 a Les ξ_i sont indépendantes d'après 3c, et de même loi d'après 3 b, la loi forte des grands nombres nous dit donc que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega) \to E(\xi_1)$ presque surement. Et la question 1c donne $E(\xi_1) = \frac{1}{2}$.

4b La quantité $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \xi_i(\omega)$ représente la proportion de 1 dans les n premiers termes du développement binaire de ω. On vient de montrer que pour presque tout ω, quand $n \to \infty$, cette proportion tend vers 1/2, autrement dit, il y a autant de 1 et de 0 asymptotiquement dans le développement de ω.