Université de Picardie Jules Verne **Année 2006-2007**
Licence de Mathématiques L3 **Probabilités**

Corrigé de l'examen de Probabilités 2ème session - 28 juin 2007

Exercice 1 (**Question de cours, 2 points**). **a)** Énoncer le théorème de Borel-Cantelli.
b) Donner un exemple d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $0 < \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) < 1$.

CORRIGÉ : a) voir cours. b) Prendre $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, et $A_n = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Alors $\sum_n \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{P}([1/4, 1/2] = 1/4$. Bien sûr les A_n ne sont pas indépendants.

Exercice 2 (**2 points**). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $0 < \lambda < 1$. On rappelle que ceci signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = n) = (1 - \lambda)\lambda^n$. Soit $Y : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ une variable aléatoire indépendante de X de loi géométrique de paramètre $0 < \mu < 1$. Soit $Z = \min(X, Y)$. Trouver la loi de Z.

CORRIGÉ : Comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathbf{P}(Z = n) = \mathbf{P}(X = n \text{ et } Y \geq n) + \mathbf{P}(Y = n \text{ et} X > n)$, puis $\mathbf{P}(X = n \text{ et } Y \geq n) = \mathbf{P}(X = n)\mathbf{P}(Y \geq n) = (1 - \lambda)\lambda^n(1 - \mu)\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k = (1 - \lambda)(1 - \mu)\lambda^n \frac{\mu^n}{1-\mu} = (1 - \lambda)(\lambda\mu)^n$. De même $\mathbf{P}(Y = n \text{ et} X > n) = (1 - \mu)\mu^n(1 - \lambda)\frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} = \lambda(1 - \mu)(\lambda\mu)^n$. Finalement, on obtient $\mathbf{P}(Z = n) = (1 - \lambda\mu)(\lambda\mu)^n$. Autrement dit, Z suit une loi géométrique de paramètre $\lambda\mu$.

Exercice 3 (**3 points**). Un appareil comporte six lampes toutes nécessaires à son fonctionnement. La durée de vie de la lampe $i; 1 \leq i \leq 6$, est une variable aléatoire notée X_i de densité de probabilité $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)kte^{-t/4}$, où $k > 0$ est une constante. L'unité de temps est l'année.
a) Quelle doit être la valeur de k ?
b) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
c) On suppose que les lampes fonctionnent indépendemment les unes des autres. Quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne pendant 4 ans en continu à partir de sa mise en marche, sans qu'aucune lampe ne tombe en panne ?

CORRIGÉ : a) Comme f est une densité de probabilité, elle doit vérifier $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$. Un calcul donne $\int_{\mathbb{R}_+} te^{-t/4}dt = 16$, d'où $k = \frac{1}{16}$.
b) Par intégrations par partie, on trouve $E(X) = 96$ et $\mathrm{Var}(X) = 32$.
c) La probabilité que la lampe i dure au moins 4 ans est $P(X_i \geq 4) = \int_4^{+\infty} f(t)dt = \frac{2}{e}$. La probabilité que l'appareil dure au moins 4 ans est $P(\forall 1 \leq i \leq 6,\ X_i \geq 4) = \Pi_{i=1}^{6} P(X_i \geq 4) = \left(\frac{2}{e}\right)^6$.

Exercice 4 (**3 points**). Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire réelle telle que $E(|X|) < \infty$ et $E(X^2) < \infty$. On supppose que X satisfait la propriété suivante : si Y et Z sont deux variables aléatoires réelles quelconques indépendantes et de même loi que X, alors X et $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$ ont même loi.
a) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble et de même loi que X. Montrer que pour tout $m \geq 1$, si $n = 2^m$, alors X et $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} X_i$ ont même loi.
b) En déduire que X suit une loi normale, en énonçant précisément le résultat du cours utilisé.

CORRIGÉ : a) Lorsque $m = 1$ et $n = 2^1 = 2$, le résultat est vrai par hypothèse de l'exercice. Montrons le résultat voulu par une récurrence forte sur $m \geq 1$. Plus précisément montrons par récurrence (forte) sur m que pourtout m-uplet $(X_1, \dots X_{2^m})$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X, la variable aléatoire $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} X_i$ a même loi que X. L'hypothèse est vraie au rang $m = 1$. Supposons la vraie pour tout $1 \leq k \leq m$, et montrons la au rang $m+1$. Soient $X_1, X_2, \dots, X_{2^m}, X_{2^m+1}, \dots, X_{2^{m+1}}$ des v.a. i.i.d. de même loi que X. L'hypothèse de récurrence appliquée à $(X_1, \dots, X_{2^m})$ donne que $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} X_i$ a même loi que X. Appliquée à $(X_{2^m+1}, \dots, X_{2^{m+1}})$ elle donne que $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=i}^{2^m} X_{2^m+i}$ a même loi que X. On applique alors l'hypothèse de récurrence au rang 1 à $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} X_i$ et $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=i}^{2^m} X_{2^m+i}$. On trouve que $\frac{1}{\sqrt{2^{m+1}}}\sum_{i=1}^{2^{m+1}} X_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} X_i + \frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=i}^{2^m} X_{2^m+i}\right)$ suit la même loi que X.
b) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Le théorème limite central (voir cours) s'applique car $E(X^2) < \infty$. Il donne la convergence en loi de $\frac{1}{\mathrm{Var}(X)\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i - E(X_i))$ vers une variable aléatoire de loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Donc la sous suite $\frac{1}{\mathrm{Var}(X)\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m}(X_i - E(X_i))$ converge aussi en loi vers la même limite quand $m \to \infty$.

Appliquons la question a) aux variables aléatoires $\tilde{X}_i = \frac{1}{\mathrm{Var}(X)}(X_i - E(X_i))$. Si les X_i sont de même loi que X, alors les $\tilde{X}_i$ sont de même loi que $\tilde{X} = \frac{1}{\mathrm{Var}(X)}(X - E(X))$, et le a) s'applique. Donc toutes les variables aléatoires $\frac{1}{\sqrt{2^m}}\sum_{i=1}^{2^m} \tilde{X}_i$ ont pour loi la même loi qui est la loi de $\tilde{X}$. Donc la limite a aussi pour loi la loi de $\tilde{X}$. Donc $\tilde{X}$ suit une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Donc X suit une loi normale d'espérance $E(X)$ et de variance $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 5 (**points**). *On pourra admettre le résultat de certaines questions pour traiter les suivantes.*
Soient X, Y, Z trois variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X et Y suivent une loi uniforme sur $]0, 1[$ et

Z suit une loi à densité $f : z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(z)\frac{1}{2}z^2e^{-z}$. Soient U et V les variables aléatoires définies par $U = XZ$ et $V = YZ$.

Première partie

a) Soit $\varphi :]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(x,y,z) = (xz, yz, z)$. Montrer que φ est un difféomorphisme sur son image $D = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}_+^*,\ 0 < u < z \text{ et } 0 < v < z\}$ et calculer son inverse $\varphi^{-1} : D \to]0,1[\times]0,1[\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^3$ ainsi que les jacobiens de φ et φ^{-1}.

b) Montrer que le triplet (U,V,Z) est à densité et calculer sa densité $f_{(U,V,Z)}$.

c) Montrer qu'alors le couple (U,V) est à densité $f_{(U,V)}$ définie par

$$f_{(U,V)}(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*} f_{(U,V,Z)}(u,v,z)\,du\,dv\,dz\,,$$

puis calculer sa densité $f_{(U,V)}$.

d) En déduire que la variable aléatoire U a pour densité $f_U(u) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)\frac{1}{2}(1+u)e^{-u}$.

Deuxième partie

Soient $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots, X_n, Y_n, Z_n, \ldots$ des variables aléatoires réelles indépendantes dans leur ensemble, avec les X_i de même loi que X, les Y_i de même loi que Y et les Z_i de même loi que Z.

e) Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iZ_i$ converge presque surement vers une limite que l'on précisera.

f) Montrer que

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_iZ_i}{\sum_{i=1}^n Y_iZ_i} \to 1$$

presque surement quand $n \to +\infty$.

g) Calculer $\mathrm{Var}(X)$, $E((X-Y)Z)$, $E((X-Y)^2Z^2)$ et $\mathrm{Var}((X-Y)Z)$, puis montrer que $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)Z_i$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance 2.

h) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers A, et si $b > 0$ est une constante, alors la suite $(\frac{A_n}{b})$ converge en loi vers $\frac{A}{b}$. *Indication : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, on pourra introduire la fonction continue bornée $f_b : x \in \mathbb{R} \mapsto f(\frac{x}{b})$.*

i) Montrer que si une suite de variables aléatoires $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers A et qu'une suite de variables aléatoires strictement positives $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque surement vers une constante $b > 0$, alors $\frac{A_n}{B_n}$ converge en loi vers la variable aléatoire $\frac{A}{b}$.

Indication : On pourra commencer par montrer que le couple (A_n, B_n) converge en loi vers (A, b). Puis on observera que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et bornée, alors $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $F(\alpha,\beta) = f(\frac{\alpha}{\beta})$ est continue et bornée. On en déduira le résultat voulu.

j) Montrer que si A suit une loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2, et si $b > 0$ est une constante alors $\frac{A}{b}$ suit une loi normale d'espérance 0 et de variance $\frac{\sigma^2}{b^2}$.

k) En déduire que la suite $\sqrt{n}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^n X_iZ_i}{\sum_{i=1}^n Y_iZ_i} - 1\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi à préciser.

CORRIGE a) φ est bien sûr de classe C^1, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y,z) = (z,0,0)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y,z) = (0,y,0)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial z}(x,y,z) = (x,y,z)$ donc $\mathrm{Jac}\varphi(x,y,z) = z^2 > 0$ sur le domaine de définition de φ. Son inverse sur D est $\varphi^{-1}(u,v,z) = (\frac{u}{z}, \frac{v}{z}, z)$. C'est une application C^1 de Jacobien $\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(u,v,z) = \frac{1}{z^2}$. L'application φ est bien un difféo sur son image.

b) (U,V,Z) est à densité si et seulement s'il existe une application $f_{(U,V,Z)}$ mesurable positive telle que pour toute application g mesurable positive de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} g(u,v,z)d\mathbf{P}_{(U,V,Z)}(u,v,z) = \int_{\mathbb{R}^3} g(u,v,z)f_{(U,V,Z)}(u,v,z)dudvdz$. Calculons donc

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} g(u,v,z)d\mathbf{P}_{(U,V,Z)}(u,v,z) &= \int_\Omega g(U(\omega),V(\omega),Z(\omega))\,d\mathbf{P}(\omega) = \int_\Omega g\circ\varphi(X(\omega),Y(\omega),Z(\omega))d\mathbf{P}(\omega) \\
&= \int_{]0,1[^2\times\mathbb{R}_+^*} g\circ\varphi(x,y,z)\frac{1}{2}z^2e^{-z}dxdydz \\
&= \int_D g(u,v,z)\mathrm{Jac}\varphi^{-1}(u,v,z)\frac{1}{2}z^2e^{-z}dudvdz = \int_D g(u,v,z)\frac{1}{2}e^{-z}dudvdz\,.
\end{aligned}$$

(On a utilisé le changement de variables sur la dernière ligne). On en déduit que $f_{(U,V,Z)}(u,v,z) = \mathbf{1}_D(u,v,z)e^{-z}$.

c) - d) Pour tout borélien $A \subset \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbf{P}((U,V)\in A) = \mathbf{P}((U,V,Z)\in A\times\mathbb{R}_+^*) = \int_{A\times\mathbb{R}_+^*} f_{(U,V,Z)}(u,v,z)dudvdz = \int_A\left(\int_{\mathbb{R}_+^*} f_{(U,V,Z)}(u,v,z)dz\right)dudv$$

d'après le théorème de Fubini-Tonelli. Ceci étant vrai pour tout borélien A de $\mathbb{R}^2$, ceci signifie que (U,V) a pour densité

$$f_{(U,V)}(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f_{(U,V,Z)}(u,v,z)dz = \int_{\mathbb{R}_+^*} \mathbf{1}_D(u,v,z)\frac{1}{2}e^{-z}dz = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u)\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(v)\int_{\max(u,v)}^{\infty}\frac{1}{2}e^{-z}dz = \frac{1}{2}e^{-\max(u,v)}.$$

d) En calculant encore une densité marginale, on obtient

$$f_U(u) = \int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{1}{2}e^{-\max(u,v)}dv = \frac{1}{2}\int_0^u e^{-u}dv + \frac{1}{2}\int_u^{+\infty} e^{-v}dv = \frac{1}{2}e^{-u}(1+u)\,.$$

e) Soit $U_i = X_i Z_i$. La loi forte des grands nombres appliquée aux U_i donne exactement $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i Z_i \to E(X_1 Z_1) = E(U)$ presque surement. De plus $E(U) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2}u(1+u)e^{-u}du = \cdots = \frac{3}{2}$. Donc la limite est $3/2$.
f) Le même raisonnement donne $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i Z_i \to E(Y_1 Z_1) = E(U)$ presque surement, puisque les Y_i ont même loi que les X_i, et donc $Y_i Z_i$ a même loi que $X_i Z_i$. En faisant le quotient, on obtient bien

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i} \to 1$$

presque sûrement quand $n \to +\infty$.
g) On calcule $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_0^1 x^2 dx - (\int_0^1 x\,dx)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. On a $E((X-Y)Z) = E(XZ - YZ) = E(XZ) - E(YZ) = 0$ car XZ et YZ ont même loi. $E((X-Y)^2 Z^2) = E((X-Y)^2)E(Z^2)$ par indépendance de $X - Y$ et de Z. De plus $E((X-Y)^2) = \mathrm{Var}(X-Y) = \mathrm{Var}(X) + V(Y) = \frac{1}{6}$ par indépendance de X et Y. Et $E(Z^2) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2} z^4 e^{-z}\,dz = \cdots = 12$. D'où $E((X-Y)^2 Z^2) = 2$.

Les $(X_i - Y_i)Z_i$ sont indépendantes et de même loi. De plus $E(|(X_i - Y_i)Z_i|) \leq E(|XZ|) + E(|YZ|) = 2E(U) = 3 < \infty$ et $E((X_i - Y_i)Z_i) = 0$ et $E((X_i - Y_i)^2 Z_i^2) = 2$. Donc d'après le théorème limite central, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)Z_i$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance 2.
h) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée, montrons que $E(f(\frac{A_n}{b})) \to E(f(\frac{A}{b}))$ quand $n \to \infty$. La fonction $f_b : x \mapsto f(\frac{x}{b})$ est continue bornée, donc par définition de la convergence en loi , on a $E(f_b(A_n)) \to E(f_b(A))$. Autrement dit, $E(f(A_n/b)) - E(f(A/b)) \to 0$, ce qui est le résultat voulu.
i) On cherche à montrer que $|E(f(\frac{A_n}{B_n})) - E(f(\frac{A}{b}))| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Remarquons d'abord que le couple (A_n, B_n) converge en loi vers (A, b). En effet, calculons la quantité

$$\begin{aligned} \left|\phi_{(A_n,B_n)}(s,t) - \phi_{(A,b)}(s,t)\right| &= |E(e^{itA_n}e^{isB_n}) - E(e^{itA}e^{itb})| \leq E(e^{itA_n}e^{isB_n}) - E(e^{itA_n}e^{isb})| + |E(e^{itA_n}e^{isb}) - E(e^{itA}e^{isb} \\ &\leq \int_\Omega |e^{isB_n} - e^{isb}| d\mathbf{P}(\omega) + |\phi_{A_n}(t) - \phi_A(t)| \end{aligned}$$

Le deuxième terme tend vers 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$ car la convergence en loi de A_n vers A équivaut à la convergence simple de ϕ_{A_n} vers ϕ_A. Le premier terme tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée : $|e^{isB_n} - e^{isb}| \leq 2$ est uniformément intégrable, et pour presque tout $\omega \in \Omega$,$|e^{isB_n} - e^{isb}| \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc (A_n, B_n) converge en loi vers (A, b).

On en déduit que pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a $E(g(A_n, B_n)) \to E(g(A, b))$ quand $n \to \infty$. Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. La fonction $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \frac{x}{y}$ est continue. Donc la fonction $F : (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to f(\frac{x}{y})$ est continue et bornée. Comme B_n est strictement positive pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $b > 0$ la convergence en loi de (A_n, B_n) vers (A, b) donne $E(F(A_n, B_n)) \to E(F(A, b))$. Ceci signifie exactement $E(f(\frac{A_n}{B_n}) \to E(f(\frac{A}{b})$, autrement dit A_n/B_n converge en loi vers A/b.

On aurait pu démontrer tout cela par une preuve directe plus élémentaire. Les grandes étapes en sont les suivantes. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le fait que $A_n \to A$ en loi, on trouve $\alpha > 0$ tel que $\mathbf{P}(|A| \geq \alpha) < \varepsilon$ et $\mathbf{P}(|A_n| \geq \alpha) < 2\varepsilon$ pour $n \geq N_1$ assez grand. Ensuite, on utilise le fait que f est continue, et donc uniformément continue sur $[-\alpha - 1, \alpha + 1]$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in [-\alpha - 1, \alpha + 1]^2$, $|x - y| \leq \eta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Comme $B_n \to b$ presque sûrement, pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe $N_{\omega,\eta/\alpha}$ tel que pour $n \geq N_{\omega,\eta/\alpha}$, $\left|\frac{1}{B_n(\omega)} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{\eta}{\alpha}$. Soit $E_N = \{\omega \in \Omega, \forall n \geq N, |\frac{1}{B_n(\omega)} - \frac{1}{b}| \leq \frac{\eta}{\alpha}\}$. La suite (E_N) est croissante et $\mathbf{P}(\cup_N E_N) = 1$. Donc il existe $N_2 \geq N_1$ tel que $\mathbf{P}(E_{N_2}) \geq 1 - \varepsilon$.

On majore maintenant $|E(f(\frac{A_n}{B_n})) - E(f(\frac{A_n}{b}))|$ en intégrant sur $\{|A_n| \leq \alpha\} \cap E_N$ et sur le complémentaire, puis on compte les ε.

j) Si A suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ elle a pour densité $f_A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$. Donc sa fonction de répartition vaut $F_A(x) = \int_{-\infty}^x f_A(u)\,du$. Celle de A/b vaut alors $F_{\frac{A}{b}}(x) = \mathbf{P}(\frac{A}{b} \leq x) = \mathbf{P}(A \leq bx) = F_A(bx)$. C'est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ bien sûr. Donc $\frac{A}{b}$ est à densité, et sa densité vaut $f_{\frac{A}{b}}(x) = (F_A(bx))' = bf_A(bx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/b)}e^{-\frac{b^2x^2}{\sigma^2}}$. C'est la densité d'une loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2/b^2
k) En utilisant les questions i) et j), avec $A_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n (X_i - Y_i)Z_i$ et $B_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i Z_i$ on obtient la convergence de $\sqrt{n}\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i Z_i} - 1\right)$ vers une variable aléatoire de loi normale d'espérance 0 et de variance $2/1 = 2$ quand $n \to \infty$.