Université de Picardie Jules Verne | **Année 2008-2009**
Licence de Mathématiques L3 | **Probabilités**

Corrigé de l'examen 1ère session- 24 juin 2009

Exercice 1 (**Question de cours, 2 points**). **a)** Énoncer le théorème de Borel-Cantelli.
b) Donner un exemple d'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $0 < \mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) < 1$.
c) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite indépendante de variables aléatoires de Bernoulli de paramètres $1/n$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité mais pas presque surement.

CORRIGÉ : a) voir cours. b) Prendre $\Omega = [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, et $A_n = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Alors $\sum_n \mathbf{P}(A_n) = +\infty$ et $\mathbf{P}(\limsup A_n) = \mathbf{P}([1/4, 1/2] = 1/4$. Bien sûr les A_n ne sont pas indépendants.
c) Soit $A_n = X_n^{-1}(1)$. Alors $\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$, de sorte que, par Borel-Cantelli, $\mathbf{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Ainsi, infiniment souvent, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut 1. D'autre part, si $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(X_n \neq 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n} \to 0$ quand $n \to \infty$, de sorte que (X_n) converge en probabilité vers O. Le fait que (X_n) vale infiniment souvent 1 empêche la suite (X_n) de converger presque surement vers 0.

Exercice 2 (Exercice fait en TD, $\simeq 6$ points). Le but de l'exercice est de fournir une démonstration probabiliste de la formule de Stirling.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles de loi de Poisson de paramètre n. Soit $Z_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}}$. On note Z une variable aléatoire réelle de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Première partie - Rappels sur des lois classiques
a) Décrire la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
b) Soit A une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ. Donner son espérance, sa variance, et sa fonction caractéristique. La justification des résultats des questions b) et e) - et de ces questions uniquement - n'est pas indispensable s'ils sont corrects.
c) Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Décrire la loi de $A+B$.
d) Décrire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
e) Donner l'espérance, la variance, et la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Deuxième partie
f) On note $Z_n^+ = \max(Z_n, 0)$, et $Z^+ = \max(Z, 0)$. Démontrer que

$$E(Z_n^+) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Z_n > t)dt \quad \text{et} \quad E(Z^+) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Z > t)\,dt$$

g) Rappeler la définition de la convergence en loi.
h) Démontrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Z.
i) En déduire que $\mathbf{P}(Z_n > t) \to \mathbf{P}(Z > t)$ pour tout réel $t \geq 0$.
j) Montrer que

$$\int_0^\infty \mathbf{P}(Z_n > t)dt \to \int_0^\infty \mathbf{P}(Z > t)\,dt \quad \text{quand} \quad n \to \infty\,.$$

k) En déduire l'équivalent asymptotique de Stirling.

CORRIGÉ :
a) Une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ vérifie $\mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Une telle variable aléatoire a pour espérance $E(A) = \lambda$, variance $\mathrm{Var}(A) = \lambda$, et pour fonction caractéristique $\varphi_A : t \in \mathbb{R} \mapsto E(e^{itA}) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.
c)Si A et B sont indépendantes, alors $\varphi_{A+B} = \varphi_A\varphi_B : t \mapsto e^{\lambda(e^{it}-1)}e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$. C'est la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$. La fonction caractéristique d'une v.a. caractérise sa loi, de sorte que $A+B$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
d) La loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ est la loi de densité $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.
e) Elle a pour espérance 0, pour variance 1 et pour fonction caractéristique $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2/2}$.
f)

$$\begin{aligned} E(Z_n^+) &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(X_n = n+k) = \sum_{k=0}^\infty\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(X_n = n+k) \\ &= \sum_{k=0}^\infty\sum_{l=0}^\infty \mathbf{1}_{l\leq k-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(X_n = n+k) = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=l+1}^\infty \mathbf{P}(X_n = n+k) \\ &= \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(X_n > n+l) = \sum_{l=0}^\infty \int_{l/\sqrt{n}}^{(l+1)/\sqrt{n}} \mathbf{P}(X_n > n+t)\,dt = \int_0^\infty \mathbf{P}(X_n > n+t)\,dt \end{aligned}$$

De la même manière, on calcule

$$\begin{aligned} E(Z^+) &= \int_0^\infty x\,d\mathbf{P}_Z(x) = \int_0^\infty\int_0^x dtd\mathbf{P}_Z(x) = \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{1}_{t<x}dtd\mathbf{P}_Z(x) \\ &= \int_0^\infty\int_0^\infty \mathbf{1}_{t<x}d\mathbf{P}_Z(x)dt = \int_0^\infty \mathbf{P}(Z > t)dt \end{aligned}$$

g) La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers Y ssi la suite des lois $\mathbf{P}_{Y_n}$ converge étroitement vers $\mathbf{P}_Y$, soit encore pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(f(Y_n)) \to E(f(Y))$ quand $n \to \infty$.
h) La suite (X_n) a même loi de Poisson de paramètre n qu'une somme de n variables aléatoires indépendantes $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$ de Poisson de paramètre 1. Pour une telle somme de variables aléatoires, d'espérance et de variance finies, le théorème central limite s'applique et donne la convergence en loi de $\dfrac{Y_1 + \ldots Y_n - n}{\sqrt{n}}$ vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comme X_n a même loi que $Y_1 + \cdots + Y_n$, $Z_n = \dfrac{X_n - n}{\sqrt{n}}$ converge également en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ a une fonction

de répartition continue sur $\mathbb{R}$. La convergence en loi équivaut donc à la convergence simple des fonctions de répartition F_{Z_n} vers la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a donc $\mathbf{P}(Z_n \leq t) \to \mathbf{P}(Z \leq t)$, et finalement,

$$\mathbf{P}(Z_n > t) = 1 - \mathbf{P}(Z_n \leq t) \to 1 - \mathbf{P}(Z \leq t) = \mathbf{P}(Z > t)$$

i) La convergence voulue s'obtient par convergence dominée de Lebesgue. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $t \in [0,1]$, $\mathbf{P}(Z_n > t) \leq 1$, et si $t \geq 1$, alors $\mathbf{P}(Z_n > t) \leq \mathbf{P}(|Z_n| > t) \leq \frac{E((Z_n)^2)}{t^2} = \frac{1}{t^2}$, de sorte que $t > 0 \mapsto \mathbf{P}(Z_n > t)$ est uniformément (en $n \in \mathbb{N}$) majoré par la fonction $t \in [0,1] \mapsto 1$ et $t \geq 1 \mapsto \frac{1}{t^2}$, qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
j) Un calcul immédiat donne $E(Z_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. On sait d'après les questions précédentes que $E(Z_n^+) \to E(Z^+)$. Un calcul permet de conclure que $E(Z_n^+) = \frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. En effet,

$$E(Z_n^+) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{n}}\mathbf{P}(X_n = n+k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{n}} e^{-n}\frac{n^{n+k}}{(n+k)!} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k-n}{\sqrt{n}} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{\sqrt{n}(k-1)!} - \sum_{k=n}^{\infty} e^{-n}\frac{n^{+1}}{\sqrt{n}k!} = \frac{e^{-n}n^n\sqrt{n}}{n!}$$

Exercice 3 ($\simeq$ 3 **points**). On appelle loi exponentielle symétrique de paramètre $\lambda > 0$ la loi sur $\mathbb{R}$ de densité $f_\lambda : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\lambda}{2}e^{-\lambda|x|}$. On appelle loi de Cauchy sur $\mathbb{R}$ de paramètre $c > 0$ la loi de densité $h_c : x \mapsto \frac{c}{\pi}\frac{1}{x^2+c^2}$.
a) Soit X une variable aléatoire réelle de loi exponentielle symétrique de paramètre λ. Calculer sa fonction caractéristique.
b) Soit Y une variable aléatoire réelle de loi de Cauchy de paramètre $c > 0$. À l'aide du théorème d'inversion de Fourier, montrer que sa fonction caractéristique est $\varphi_Y : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-c|t|}$.
c) Si X et Y sont deux variables aléatoires rélles *indépendantes* de lois de Cauchy de paramètres respectifs c et c', quelle est la loi de $X+Y$?

CORRIGÉ : a) On a

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-\lambda|x|}dx = \frac{\lambda}{2}\int_0^{\infty} e^{(it-\lambda)x}dx + \frac{\lambda}{2}\int_{-\infty}^0 e^{(it+\lambda)x}dx \\ &= \frac{\lambda}{2}(\frac{1}{it+\lambda} - \frac{1}{it-\lambda}) = \frac{\lambda}{2}\frac{2\lambda}{\lambda^2+t^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}\end{aligned}$$

b) Le théorème d'inversion de Fourier nous dit que si f_λ est la densité de la loi exponentielle symétrique, alors $f_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\varphi_X(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{\lambda^2}{\lambda^2+t^2}dt$. En particulier, on en déduit que $\int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+t^2}dt = e^{-\lambda|x|}$. Nous cherchons la fonction caractéristique de la densité $h_c : x \mapsto \frac{c}{\pi}\frac{1}{x^2+c^2}$. Le calcul ci-dessus montre que $\varphi_Y(t) = \frac{c}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}\frac{1}{c^2+x^2}dx = e^{-c|t|}$
c) Les v.a. X et Y sont indépendantes. En particulier, $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$. Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = e^{-(c+c')|t|}$ La fonction caractéristique de $X+Y$ est celle d'une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$. Comme la fonction caractéristique caractérise la loi, $X+Y$ suit une loi de Cauchy de paramètre $c+c'$.

Voir le livre "exercices de probabilités" licence, master, écoles d'ingénieurs, Cottrell-Genon-Catalot-Duhamel -Meyre, éditions Cassini, exercices 4.12 et 4.14 pour plus de propriétés sur les lois de Cauchy.

Exercice 4 ($\simeq$ 6 **points**). Le but est de répondre à la question suivante. Étant donné le cercle $C(O,1)$ de centre O et de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde tirée au hasard ait une longueur inférieure ou égale à 1 ? Les deux premières parties de cet exercice sont indépendantes et proposent deux modélisations différentes de ce problème.

1) Une corde est un segment joignant deux points du cercle. Tirer une corde au hasard, c'est tirer au hasard un couple (X,Y) de points du cercle. La longueur de la corde est la distance $D(X,Y)$ entre les deux points. On suppose que les deux points sont tirés indépendemment l'un de l'autre. On identifie un point $x = e^{i\theta}$ avec l'angle correspondant $\theta \in [0,2\pi[$. On suppose que $X = e^{i\theta_X}$ et $Y = e^{i\theta_Y}$ suivent une loi uniforme sur le cercle. Pour simplifier, on étudie plutôt les variables aléatoires θ_X et θ_Y. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [0,2\pi[^2$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1.a) Si θ_1 et θ_2 sont deux angles fixés dans $[0,2\pi[$, faire un dessin, puis calculer le carré de la distance entre $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.

1.b) Si θ_X et θ_Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[0,2\pi[$, donner la loi du couple (θ_X,θ_Y), puis montrer que le couple $(\theta_X - \theta_Y, \theta_Y)$ admet pour densité

$$f_{(\theta_X-\theta_Y,\theta_Y)}(z,y) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_{[-z,2\pi-z[}(y)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)$$

En déduire que $Z = \theta_X - \theta_Y$ suit une loi, dite triangulaire, de densité

$$f_Z : z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(z)\frac{2\pi-|z|}{4\pi^2}.$$

1.c) Montrer que $D(X,Y) \leq 1$ si et seulement si $Z \in [-2\pi,-5\pi/3] \cup [-\pi/3,\pi/3] \cup [5\pi/3,2\pi]$.

1.d) En déduire la probabilité que $D(X,Y) \leq 1$.

2) Le problème étant invariant par symétries, quitte à faire des rotations, on peut supposer que la corde est verticale. Dans ce cas, choisir une corde au hasard revient à choisir son abscisse au hasard. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [-1,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

2.a) Soit $x \in [-1,1]$ et C_x la corde verticale du cercle $C(O,1)$ passant par $(x,0)$. Faire un dessin. Quelle est sa longueur $L(C_x)$?

2.b) Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1,1]$. Soit $\varphi : x \mapsto L(C_x)$ l'application définie à la question précédente. Quelle est la loi suivie par la longueur $L(C_X) = \varphi(X)$ de la corde C_X correspondante ? (On utilisera le théorème de changement de variable pour donner sa densité.)

2.c) Quelle est la probabilité que $L(C_X) \leq 1$?

3) Synthèse : comparer les réponses précédentes et commenter.

Corrigé : 1a) La distance en question vaut $D(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| = \sqrt{2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

1b) les v.a. θ_X et θ_Y sont indépendantes, la densité du produit est donc le produit des densités. Soit encore $f_{(\theta_X,\theta_Y)}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(x)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)$. Soit $\Phi : (x,y) \mapsto (x-y,y)$. C'est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est linéaire, de différentielle constante égale à Φ, et donc de Jacobien égal à 1. Le théorème de changement de variable donne $f_{(\theta_X-\theta_Y,\theta_Y)}(z,y) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_{[-z,2\pi-z[}(y)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)$. La v.a. $Z = \theta_X - \theta_Y$ a pour densité la densité marginale $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_{[-z,2\pi-z[}(y)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)\,dy$. Elle vaut 0 si $|z| > 2\pi$; et en séparant les cas $z \leq 0$ et $z \geq 0$ on trouve que $f_Z(z) = \mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(z)\frac{2\pi-|z|}{4\pi^2}$.

1c) $D(X,Y) \leq 1$ ssi $2 - 2\cos Z \leq 1$ soit encore $\cos Z \geq 1/2$. Comme $Z \in [-2\pi,2\pi]$ on obtient le résultat voulu.

1d) On a $P(D(X,Y) \leq 1) = P(Z \in [-2\pi,-5\pi/3] \cup [-\pi/3,\pi/3] \cup [5\pi/3,2\pi])$. Il faut calculer $\int_{[-7\pi/3,-5\pi/3]\cup[-\pi/3,\pi/3]} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$

2a) Par Pythagore, on a $L(C_x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

2b) Soit $\varphi_1 :]0,1[\to]0,2[$ la restriction de φ à $]0,1[$ et φ_2 sa restriction à $]-1,0[$. Alors $\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$ et $\varphi_2^{-1}(y) - = \sqrt{1-\frac{y^2}{4}}$. On a aussi $(\varphi_1^{-1})'(y) = \frac{-y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$ et $(\varphi_2^{-1})'(y) = \frac{y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$. Par changement de variable, on obtient

$$f_L(l) = \frac{\mathbf{1}_{[0,2]}(y)y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$$

2c) La proba cherchée vaut $P(L(C_X) \leq 1) = \displaystyle\int_0^1 f_L(l)\,dl = 1 - \sqrt{3}/2\,.$

3) Commentaire. La modélisation conduit à deux résultats différents. Aucun n'est meilleur que l'autre. Le problème est mal posé. Le mathématicien doit demander ce que signifie en pratique tirer une corde au hasard.