Corrigé de l'examen 1ère session de probabilités - Jeudi 22 juin 2006

Exercice I ($\simeq$ points) : Le but est de répondre à la question suivante. Étant donné le cercle $C(O,1)$ de centre O et de rayon 1, quelle est la probabilité qu'une corde tirée au hasard ait une longueur inférieure ou égale à 1 ? Les trois parties de cet exercice sont indépendantes et proposent trois modélisations différentes de ce problème.

1) Une corde est un segment joignant deux points du cercle. Tirer une corde au hasard, c'est tirer au hasard un couple (X,Y) de points du cercle. On suppose que les deux points sont tirés indépendemment l'un de l'autre. On identifie un point $x = e^{i\theta}$ avec l'angle correspondant $\theta \in [0,2\pi[$. On suppose que $X = e^{i\theta_X}$ et $Y = e^{i\theta_Y}$ suivent une loi uniforme sur le cercle. Pour simplifier, on étudie plutôt les variables aléatoires θ_X et θ_Y. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [0,2\pi[^2$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ.

1.a) Si θ_1 et θ_2 sont deux angles fixés dans $[0,2\pi[$, calculer le carré de la distance entre $e^{i\theta_1}$ et $e^{i\theta_2}$.

1.b) Si θ_X et θ_Y suivent une loi uniforme sur $[0,2\pi[$, quelle est la loi de la variable aléatoire $\theta_X - \theta_Y$? (Donner sa densité.)
En déduire la (densité de la) loi de la variable aléatoire $D(X,Y)^2$ donnant le carré de la distance de X à Y?

1.c) Quelle est la probabilité que $D(X,Y) \le 1$?

2) Le problème étant invariant par symétries, quitte à faire des rotations, on peut supposer que la corde est verticale. Dans ce cas, choisir une corde au hasard revient à choisir son abscisse au hasard. L'espace de probabilité est alors $\Omega = [-1,1]$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

2.a) Soit C_x la corde verticale du cercle $C(O,1)$ passant par $(x,0)$. Quelle est sa longueur $L(C_x)$?

2.b) Soit X une v.a. de loi uniforme sur $[-1,1]$. Soit $\varphi : x \mapsto L(C_x)$ l'application définie à la question précédente. Quelle est la loi suivie par la longueur $L(C_X) = \varphi(X)$ de la corde C_X correspondante ? (On utilisera le théorème de changement de variable pour donner sa densité.)

2.c) Quelle est la probabilité que $L(C_X) \le 1$?

3) Le problème étant invariant par rotations, on peut cette fois supposer que toutes les cordes considérées passent par $(-1,0)$. Une corde est alors paramétrée par l'angle $\alpha \in]-\pi/2,\pi/2[$ qu'elle fait avec l'axe (Ox). L'espace Ω est alors $]-\pi/2,\pi/2[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

3.a) Calculer la longueur $l(C_\alpha)$ de la corde C_α faisant un angle α avec l'horizontale.

3.b) Calculer la loi de la longueur $l(C_A)$ d'une corde dont l'angle A avec l'horizontale suit une loi uniforme dans $]-\pi/2,\pi/2[$.

3.c) Quelle est la probabilité que $l(C_A) \le 1$?

4) Synthèse : comparer les trois réponses précédentes et commenter.

Corrigé : 1a) La distance en question vaut $d(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) = |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}| = \sqrt{2 - 2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

1b) les v.a. θ_X et θ_Y sont indépendantes, la densité du produit est donc le produit des densités. Soit encore

$$f_{(\theta_X,\theta_Y)}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_[0,2\pi[(x)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)\,.$$

Soit $\Phi : (x,y) \mapsto (x-y,y)$. C'est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui est linéaire, de différentielle constante égale à Φ, et donc de Jacobien égal à 1. Le théorème de changement de variable donne

$$f_{(\theta_X-\theta_Y)}(z,y) = \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_[-z, 2\pi - z[(y)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)\,.$$

La v.a. $Z = \theta_X - \theta_Y$ a pour densité la densité marginale $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4\pi^2}\mathbf{1}_[-z,2\pi-z[(y)\mathbf{1}_{[0,2\pi[}(y)\,dy$. Elle vaut 0 si $|z| > 2\pi$; et en séparant les cas $z \le 0$ et $z \ge 0$ on trouve que $f_Z(z) = \mathbf{1}_{[-2\pi,2\pi]}(z)\frac{2\pi-|z|}{4\pi^2}$.

1c)$D(X,Y) \le 1$ ssi $2 - 2\cos Z \le 1$ soit encore $\cos Z \ge 1/2$. Comme $Z \in [-2\pi, 2\pi]$ on obtient le résultat voulu.

1d) On a $P(D(X,Y) \le 1) = P(Z \in [-2\pi,-5\pi/3] \cup [-\pi/3,\pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi])$. Il faut calculer

$$\int_{[-7\pi/3,-5\pi/3]\cup[-\pi/3,\pi/3]} f_Z(z)dz = \frac{1}{3}$$

2a) Par Pythagore, on a $L(C_x) = 2\sqrt{1-x^2}$.

2b) Soit $\varphi_1 :]0,1[\to]0,2[$ la restriction de φ à $]0,1[$ et φ_2 sa restriction à $]-1,0[$. Alors $\varphi_1^{-1}(y) = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$ et $\varphi_2^{-1}(y) - = \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}$. On a aussi $\varphi_1^{-1\prime}(y) = \frac{-y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$ et $\varphi_2^{-1\prime}(y) = \frac{y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$. Par changement de variable, on obtient

$$f_L(l) = \frac{\mathbf{1}_{[0,2]}(y)y}{4\sqrt{1-y^2/4}}$$

2c) La proba cherchée vaut

$$P(L(C_X) \le 1) = \int_0^1 f_L(l)\,dl = 1 - \sqrt{3}/2\,.$$

3) Commentaire. La modélisation conduit à deux résultats différents. Aucun n'est meilleur que l'autre. Le problème est mal posé. Le mathématicien doit demander ce que signifie en pratique tirer une corde au hasard.

Exercice II. 1) f est une densité de probabilité si $f \geq 0$ (ce qui est le cas ici), f est mesurable (ici c'est le cas, elle est même continue par morceaux) et $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$. On en déduit que k doit valoir

$$k = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx}$$

Or l'intégrale vaut $2\int_{]1,\infty[} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx = \frac{2}{\alpha}$. Donc $k = \alpha/2$.

2) $E(X)$ est définie lorsque $E(|X|) < \infty$. Or cette quantité est finie ssi l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{\alpha}} dx$ converge, soit encore ssi $\alpha > 1$. Dans ce cas, comme la loi de X est symétrique par rapport à 0 (densité paire), on vérifie que $E(X) = 0$.

La variance de X est définie ssi $E(X^2) < \infty$ soit encore ssi $\alpha > 2$. Dans ce cas, elle vaut $Var(X) = E(X^2) = \frac{4}{\alpha}\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\, dx = \frac{4}{\alpha(\alpha-2)}$.

2b) f est paire, donc X et $-X$ ont même loi ($f_{-X}(x) = f_X(-x) = f_X(x)$). Donc $E(e^{itX}) = E(e^{it(-X)} = E(e^{i(-t)X})$. Donc $\varphi_X : t \mapsto E(e^{itX})$ est paire. La même égalité nous dit que $\overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t)$, ie φ_X est à valeurs réelles.

3a) $|1 - \cos u| \leq 2$ donc $u \mapsto \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ En 0, $\frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}} \sim \frac{u^2}{2u^{\alpha+1}} = \frac{1}{2u^{\alpha-1}}$. C'est intégrable sur $[0, 1]$ car $\alpha < 2$.

3b) D'abord, comme φ est réelle, elle estégale à $\varphi_X(t) = \int_{|x|>1} \cos(tx)\frac{1}{|x|^{\alpha+1}} dx$ On a $\frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha}} = \frac{\alpha}{2}\int_{|x|>1} \frac{1-\cos(tx)}{(tx)^{\alpha}} \frac{1}{x} dx$. D'après ce qui précède on peut appliquer le théorème de convergence dominée. On obtient $\lim_{t\to 0} \frac{1-\varphi(t)}{|t|^{\alpha}} = \lim_{t\to 0} \alpha \int_{u\geq|t|} \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}} = \alpha \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1-\cos u}{u^{\alpha+1}} du = C$.

4a) Si $\alpha > 2$, alors $E(X_n^2) < \infty$ et le TLC s'applique. $\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi normale de moyenne 0 et de variance 1. Autrement dit, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une (v.a. qui suit une) loi normale de moyenne 0 et de variance $\sigma^2 = \frac{4}{\alpha(\alpha-2)}$.

4b) Si $\alpha < 2$ le TLC ne s'applique plus. Mais d'aprés 3b, $\varphi_{S_n/n^{1/\alpha}}(t) = \left(\varphi_{X_1}(t/n^{1/\alpha})\right)^n = (1 - \frac{C|t|^{\alpha}}{n} + o(frac1n))^n$. Donc $\varphi_{S_n/n^{1/\alpha}}(t)$ converge vers $e^{-C|t|^{\alpha}}$. Donc $S_n/n^{1/\alpha}$ converge en loi vers une va de loi inconnue et de fonction caractéristique donnée ci-dessus.

4c) $t \mapsto \psi(t) = e^{-C|t|^{\alpha}}$ est une fonction caractéristique d'une certaine loi Z d'après ce qui précde. Donc $t \mapsto \psi(t/C^{\alpha})$ est la fonction caractéristique de Z/C^{α}. c'est ce qu'on voulait.

5) La loi (faible ou forte) des grands nombres est valide dès que $E(|X_n| < \infty$, i.e. ici $\alpha > 1$. Lorsqu'elle s'applique la limite M vaut $E(X_n) = 0$.

Corrigé Exercice III

1)

$$P(\frac{U_n}{V_n} \leq t) = P(\frac{U_n}{V_n} \leq t \text{ et } |V_n - v| \leq \varepsilon) + P(\frac{U_n}{V_n} \leq t \text{ et } |V_n - v| > \varepsilon)$$

Le deuxième terme est majoré par $P(|V_n - v| > \varepsilon)$. Si l'événement $\frac{U_n}{V_n} \leq t$ et $|V_n - v| \leq \varepsilon$ est réalisé, alors $U_n \leq tV_n \leq t(v + \varepsilon)$, d'où la majoration voulue.

Pour l'autre inégalité, on écrit

$$P(U_n \leq tv - |t|\varepsilon) = P(U_n \leq tv - |t|\varepsilon \text{ et } |V_n - v| \leq \varepsilon) + P(U_n \leq tv - |t|\varepsilon \text{ et } |V_n - v| > \varepsilon) \leq P(\frac{U_n}{V_n} \leq t) + P(|V_n - v| > \varepsilon).$$

2)Si $U_n \to U$ en loi, alors pour tout ε sauf un nombre dénombrable, on a quand $n \to \infty$ $P(U_n \leq tv \pm |t|\varepsilon) \to P(U \leq tv \pm |t|\varepsilon)$; En faisant d'abord tendre $n \to \infty$ on obtient une inégalité sur les $\limsup$ et $\liminf$ de $P(U_n \leq tV_n)$. En faisant tendre $\varepsilon \to 0$ en évitant les discontinuités de F_U, on obtient la convergence de $P(U_n \leq tV_n)$ vers $F_U(tv) = P(U \leq tv) = F_{U/v}(t)$. D'où le résultat.