Université Rennes
Barbara Schapira

Contrôle continu numéro 1 - deux heures - mardi 7 novembre 2017

Exercice 1 (Environ 5 points) **a)** Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Vous justifierez très soigneusement votre réponse

$$\begin{array}{rcl} f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 & \mapsto & (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\ f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 & \mapsto & (3x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2 \\ f_3 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 & \mapsto & (x-t, y-t, t, x+y+z, x+y+z+t) \in \mathbb{R}^5 \end{array}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, pouvez-vous affirmer sans calcul, en utilisant le cours, si elles peuvent ou pas être injectives ou surjectives?
c) Pour celles qui sont linéaires, calculez leur noyau Ker f_i et leur image Im f_i.
d) Déduisez-en lesquelles sont injectives, ou surjectives, ou bijectives.

Corrigé f_1 n'est pas linéaire car $f_1(2,2,2) = (4,4,2) \neq 2 \times f_1(1,1,1) = 2 \times (1,2,1)$. f_2 est linéaire car $f_2((x,y,z)) + f_2((x',y',z')) = (3x+y, y+z) + (3x'+y', y'+z') = (3(x+x') + (y+y'), (y+y') + (z+z')) = f_2((x,y,z) + (x',y',z'))$. De même $f_2(\lambda(x,y,z)) = (3\lambda x + \lambda y, \lambda y + \lambda z) = \lambda f_2(x,y,z)$ .Donc f_2 est linéaire.

On procède de la même manière pour f_3 qui est linéaire.

b) Sans calcul, on sait que f_2 n'est pas injective car $\dim \mathbb{R}^2 < \dim \mathbb{R}^3$ et f_3 n'est pas surjective car $\dim \mathbb{R}^4 < \dim \mathbb{R}^5$

c) $Ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (3x+y=0 \quad \text{et} \quad y+z=0\}$ Ainsi

$$Ker f_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y=-3x \quad \text{et} \quad z=3x\} = \{(x,-3x,3x) \in \mathbb{R}^3, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-3,3), x \in \mathbb{R}\} = Vect(1,-3,3)$$

Tout élément (u,v) de $\mathbb{R}^2$ peut s'écrire $(u,v) = (3x+y, y+z)$ avec par exemple $y=0$ $z=v$ et $x=u/3$. autrement dit, $(u,v) = f_2(u/3, 0, v)$ donc $Im f_2 = \mathbb{R}^2$ et f_2 est surjective.

$$Ker f_3 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x-t=0, y-t=0, t=0, x+y+z=0, x+y+z+t=0\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x=y=z=t=0\}$$

DOnc $Ker f_3 = \{(0,0,0,0)\}$ et f_3 est injective. $(a,b,c,d,e) \in Im f_3$ ssi il existe (x,y,z,t) tq $x-t=a$, $y-t=b$, $c=t$, $x+y+z=d$, $x+y+z+t=e$. En particulier, $c=t$, $x=a+c$, $y=b+c$, $x+y+z=d$, $x+y+z=e-c$, d'où $d=e-c$. Si $d=e-c$ alors $(a,b,c,d,e) = f_3(a+c, b+c, d-a-b-2c, c)$. Ainsi, $Ker(f_3) = \{(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5, d=e-c\}$. Un argument de dimension (via le théorème du rang) nous assure que $\dim Ker f_3 + \dim Im f_3 = 4$, soit ici $\dim Ker f_3 = 0$ et $\dim Im f_3 = 4$. Cela correspond bien aux calculs ci dessus.

Exercice 2 (Algèbre linéaire et géométrie, environ 2,5 points) Donnez sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y=0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=-x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y=0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z=0$

Il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique. Pour la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=0$, $e_1=(1,0)$ est envoyé sur e_1 et $e_2=(0,1)$ est envoyé sur $(0,-1)=-e_2$ .Ainsi la matrice de cette réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Pour la réflexion par rapport à la droite d'équation $y=-x$, e_1 est envoyé sur $-e_2$ et e_2 sur $-e_1$ d'où la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La rotation de centre $0_{\mathbb{R}^2}$ et d'angle $\pi/3$ a pour matrice $\begin{pmatrix} \cos\pi/3 & -\sin\pi/3 \\ \sin\pi/3 & \cos\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. La projection orthogonale a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour finir la réflexion par rapport au plan d'équation $z=0$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (Environ 1,5 points) Dessinez les ensembles suivants, et précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en justifiant soigneusement votre réponse.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}, \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 2\}, \quad C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=1\}.$$

A n'est pas un sev car $(1,1) \in A$, $(1,-1) \in A$ et $(1,1)+(1,-1) = (2,0) \notin A$ donc A pas stable par addition.

B n'est pas un sev car $(0,0) \notin B$. De même pour C.

Exercice 4 (Environ 3,5 points) Vrai ou faux ? Justifiez vos réponses.

1. Un système de 4 équations à 3 inconnues est toujours inconsistant ?
2. Il existe une matrice 3×4 de rang 4
3. Si A est une matrice 3×4 et $V \in \mathbb{R}^4$ alors $A.V$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$.
4. Si A est une matrice 4×4 de rang 4 n'importe quel système linéaire dont la matrice des coefficients est A admet une solution et une seule.

5. Il existe un système de trois équations linéaires à trois inconnues qui a exactement trois solutions.

6. Un système linéaire avec cinq équations et quatre inconnues possède ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.

7. Si A est une matrice 4×4 tq le système $AX = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ admet une seule solution, alors le système $AX = \vec{0}$ admet une unique solution.

Un système de 4 équations à 3 inconnues peut tout à fait être consistant. Par exemple $x = 2, y = 1, z = 3, x+y+z = 6$. Plus généralement, lorsque la FREL de la matrice étendue du système ne contient pas la ligne $(0 \dots 0|1)$ le système est consistant.

Une matrice de taille 3×4 a au plus 3 pivots, elle est donc de rang au plus 3.

Si $V \in \mathbb{R}^4$ et $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ alors $A.V \in \mathbb{R}^3$ par définition du produit matriciel.

Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ est de rang 4 alors elle est inversible et tout système $AX = b$ équivaut à $X = A^{-1}b$ et a donc une unique solution.

Un système linéaire a toujours $0, 1$ ou une infinité de solutions quel que soit le nombre d'équations et d'inconnues.

Si $A \in M_4(\mathbb{R})$ est tq le système $AX = (1, 2, 3, 4)$ admet une unique solution, alors A est de rang 4 donc inversible. Donc le système $AX = 0$ admet une unique solution $X = 0$.

Exercice 5 (Environ 3 points) Dans cet exercice, les systèmes linéaires devront être résolus par la méthode de Gauss-Jordan.

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, -3, -1)$, $v_3 = (-2, -4, 2, 1)$ et $v_4 = (3, 6, 0, 2)$.
a) Les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 appartiennent-ils au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ y = 2x\}$
b) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
d) La famille (v_1, v_2, v_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
e) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

a) Oui, vérification immédiate.

b) Dire que la famille (v_1, v_2, v_3) est libre signifie que si $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Résolvons le systeme $\begin{cases} \lambda_1 & + & 0 & - & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & 0 & - & 4\lambda_3 & = & 0 \\ 3\lambda_1 & - & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 0 \\ 4\lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$ L'algorithme de GJ donne successivement

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 19/3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, la seule solution de ce système est $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ donc la famille (v_1, v_2, v_3) est libre.

c) Pour la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) la vérification est similaire. Par GJ on a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -10 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -10 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -8/3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi il y a une infinité de solutions non nulles, de la forme $(-\lambda_4, -\lambda_4/3, \lambda_4, \lambda_4)$, de sorte que la famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est liée;

d) $\mathbb{R}^4$ est de dim 4 donc (v_1, v_2, v_3) ne peut pas être génératrice.

e) La famille $(v_1, \dots v_4)$ est liée donc ce n'est pas une base de $\mathbb{R}^4$ donc elle n'est pas génératrice.

Commentaire supplémentaire : Le sev F est de dimension 3 car c'est le noyau de la forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z, t) \to y - 2x$. Le théorème du rang dit donc $\dim F + \dim \mathbb{R} = 4$. Or (v_1, v_2, v_3) sont dans F, cela ne peut donc pas être une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$. Mais comme $(v_1, \dots v_4)$ est liée, cela signifie que v_4 est dans F aussi.

Exercice 6 (Environ 4 points) Dans cet exercice, les systèmes linéaires devront être résolus par la méthode de Gauss-Jordan.

Dans $\mathbb{R}^4$, soient $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, -1)$, et $v_4 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.
a) Vérifier qu'ils appartiennent au sous-espace vectoriel $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0\}$.
b) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle libre ?
c) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
d) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle génératrice de F ?
e) A l'aide du théorème du rang appliqué à $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x, y, z, t) = x + y + z + t$, déterminez la dimension de F.
f) La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
g) Cette famille forme-t-elle une base de F ?

a) immédiat.

b) La famille est incluse dans le sev F qui est de dimension 3 par exemple par le thm du rang (noyau d'une forme linéaire, hyperplan). Donc cette famille de 4 vecteurs n'est pas libre car incluse dans un ev de dim 3.

Mais si on n'a pas encore calculé la dim de F on fait GJ et on trouve qu'elle n'est pas libre.

c) Elle n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^4$ car incluse dans F qui est un sev strictement inclus dans $\mathbb{R}^4$.

d) La famille (v_1, v_2, v_3) est libre dans F de dimension 3 donc c'est une base donc elle est génératrice de F. A plus forte raison, (v_1, v_2, v_3, v_4) est génératrice de F.

e) déjà dit avant F est de dim 3.

f) Ce n'est pas une base sinon elle serait génératrice cf plus haut ce n'est pas le cas.

g) Ce n'est pas non plus une base de F car elle n'est pas libre.

Exercice 7 (Environ 2 points) Vrai ou faux, justifiez soigneusement vos réponses.
a) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_3) est-elle libre ?
b) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^3$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
c) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle génératrice ?
d) Soit (u_1, u_2, u_3) un système générateur de $\mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^2$. La famille (u_1, u_2, u_3, v) est-elle libre ?

a) Si (u_1, u_2, u_3) engendre $\mathbb{R}^3$ alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$ donc elle est libre donc (u_1, u_3) aussi.

b) Si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, la famille reste génératrice (car le sev engendré par une famille plus grande est plus grand)

c) oui, idem

d) Une famille de 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ ne peut pas être libre. Car $\mathbb{R}^2$ de dim 2.

Exercice 8 (Environ 2 points) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

a) Déterminez la dimension de F et donnez-en une base.
b) Soit

$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$

Montrez que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$, donnez une base de G et calculez sa dimension.
c) Montrez que $F \subset G$.
d) A-t-on $F = G$?

a) F est de dimension au plus 4. La famille (v_1, v_2) est libre car les deux vecters ne sont pas colinéaires. Donc $\dim F \geq 2$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) forment une famille de rang 2 de F. Ceci se vérifie par GJ. Or $F = Vect(v_1, \ldots, v_4)$ donc $\dim F = 2$. Une base est par ex (v_1, v_2)

b) C'est le noyau d'une forme lin c'est donc un sev de dim 3. Une base est $(1, 0, 0, 1/4)$, $(1, 1, 0, 0), (1, 0, -1/2, 0)$

c) v_1 et v_2 sont dans G donc toute comb lin aussi donc $F \subset G$.

d) $F \neq G$ car ils ne sont pas de même dimension;

Université Rennes
Barbara Schapira

Contrôle continu numéro 2 - deux heures - mardi 19 décembre 2017

Exercice 1 Pour chacune des applications linéaires ci-dessous, dessinez la base canonique et son image, puis donnez la matrice de l'application linéaire dans la base canonique.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $x = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $y = 0$

Voir précédent CC

Exercice 2 (Environ 1,5 points) Dessinez les ensembles suivants, et précisez lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ en justifiant soigneusement votre réponse.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 - y^2 = 0\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 2\}, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y = 1\}.$$

Voir précédent CC

Exercice 3 ( ) Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par

$$v_1 = (1, -1, 3, 2), \quad v_2 = (3, -1, 0, 1), \quad v_3 = (1, 1, -6, -3) \quad \text{et} \quad v_4 = (0, 2, -9, -5).$$

1. Quelle est la définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel ?
2. Quelle est la définition du rang d'une famille de vecteurs ?
3. A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan correctement détaillé, déterminez la dimension de F. Justifiez votre méthode.
4. Donnez-en une base.
5. Soit
$$G = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0\}.$$
Montrez que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
6. Donnez sa dimension.
7. Donnez une base de G
8. Montrez que $F \subset G$.
9. A-t-on $F = G$?

F est de dimension au plus 4. La famille (v_1, v_2) est libre car les deux vecters ne sont pas colinéaires. Donc $\dim F \geq 2$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3, v_4) forment une famille de rang 2 de F. Ceci se vérifie par GJ. Or $F = Vect(v_1, \dots, v_4)$ donc $\dim F = 2$. Une base est par ex (v_1, v_2)

G est le noyau d'une forme lin c'est donc un sev de dim 3. Une base est $(1, 0, 0, 1/4), (1, 1, 0, 0), (1, 0, -1/2, 0)$

v_1 et v_2 sont dans G donc toute comb lin aussi donc $F \subset G$.

$F \neq G$ car ils ne sont pas de même dimension;

Exercice 4 Calculer les déterminants des matrices suivantes de la manière la plus rapide possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -\sqrt{2} & 3 & 3 + \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Pour la matrice B on voit immédiatement que la troisième colonne est égale à la deuxième moins la premiere donc B est de rang au plus deux donc le déterminant de B est nul Pour calculer $\det A$ on développe par / à la 3eme colonne. On obtient

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{vmatrix} &= (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\left(7 \times \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}\right) + 7 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} \\
&= -7 \times (72 - 25) - 8 \times (-13) + 7 \times (-26) - 4 \times (-13) = \cdots = -355
\end{aligned}$$

Exercice 5 Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Soient $v_1 = (1,-1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (-1,1,2)$.

1. Montrez que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$ en utilisant Gauss-Jordan.
2. Même question à l'aide du déterminant $\det(v_1, v_2, v_3)$
3. Calculez $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$.
4. Déterminez la matrice A associée à f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Déduisez-en que f est une symétrie par rapport à un plan vectoriel que l'on déterminera.
6. Ecrivez la matrice P de l'application identité de la base $\mathcal{B}$ dans la base canonique.
7. A l'aide de l'algorithme de Gauss-Jordan, calculez P^{-1}.
8. Quelle est la relation entre P, P^{-1}, A, M. Faites un diagramme.

GJ donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ puis } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul de determinant, par ex avec la regle de Sarrus, donne $\det(v_1, v_2, v_3) = 6$

Un calcul élémentaire donne $f(v_1) = -v_1,\ f(v_2) = v_2,\ f(v_3) = v_3$ D'où $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^2 = I_3$ ou encore $f \circ f = Id$, donc f est une symétrie orthogonale par rapport au plan $vect(v_2, v_3)$

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \cdots = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ et

$M = PAP^{-1}$

Exercice 6 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (-4x - 32y + 4z + 18t, 6y - 3t, -2x - 10y + 2z + 6t, 6y - 3t)\,.$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.
2. Calculez son polynôme caractéristique.
3. Quelle est la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une application linéaire.
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Pouvez-vous en déduire directement si elle est diagonalisable ou pas ?
6. Calculez les espaces propres de f.
7. Donnez une base (b_1, b_2, b_3, b_4) de E constituée de vecteurs propres de f.
8. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4).
9. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3, b_4) vers (e_1, e_2, e_3, e_4).
10. Calculez P^{-1}.
11. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.
12. Comment fait-on pour calculer A^{17} ? On ne demande pas le résultat du calcul mais la méthode.

On a $A = \begin{pmatrix} -4 & -32 & 4 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & -10 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Elle n'est pas symétrique, on ne peut donc rien dire avant calcul. Son polynôme caractéristique se calcule en développant par rapport à la 2me ligne par exemple. On trouve

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+44 & 32 & -4 & -18 \\ 0 & X-6 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & X-2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & X+3 \end{vmatrix} = \cdots = X^2(X-3)(X+2)$$

Les valeurs propres sont $0, 3, -2$. Elle n'a que 3 valeurs propres dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut encore pas en déduire si elle est diagonalisable ou pas. On calcule par Gauss Jordan

$$E_0 = Ker f = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une base deE_0. De même, par Gauss Jordan,

$$E_{-2} = Ker(f + 2Id) = Ker(A + 2I_4) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et pour finir

$$E_3 = Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On prend $b_1 = (1, -1, 2, -2)$, $b_2 = (1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (2, 0, 1, 0)$ et $b_4 = (-2, 1, 0, 1)$. La matrice D de f dans la base (b_i) est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P de la base (b_i) vers la base (e_i) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule son inverse par Gauss Jordan, et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Le diagramme usuel nous dit que $A = PDP^{-1}$ de sorte que

$$A^{17} = PD^{17}P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{17} \end{pmatrix}.P^{-1}.$$