Université Rennes 1 L2 MIASHS - AL2E - 2016/2017 UFR Mathématiques
Barbara Schapira

Contrôle continu - 1h30- mercredi 2 novembre 2016

Exercice 1 (Algèbre linéaire et géométrie) Donner la matrice des applications linéaires suivantes dans la base canonique.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur la droite d'équations $x = 0$ et $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$

Corrigé Il n'y a qu'à regarder les images des vecteurs de la base canonique, et on trouve les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Donner la définition de *F et G sont supplémentaires.*
2. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels qui sont supplémentaires l'un de l'autre. Faire un dessin.
3. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple de deux sous-espaces vectoriels qui ne sont pas supplémentaires l'un de l'autre. Faire un dessin.
4. Si $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'application linéaire $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$.
5. Soit E un espace vectoriel et $p : E \to E$ une application linéaire telle que $p \circ p = p$. Montrer que $F = Kerp$ et $G = Im(p)$ sont supplémentaires.

Corrigé

F et G sont supplémentaires si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$.
Par ex le plan horizontal d'équation $z = 0$ et la droite verticale d''equations $x = y = 0$ sont supplémentaires.
Les droites $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$ ne sont pas supplémentaires l'une de l'autre.
La projection orthogonale p sur le plan d'équation $z = 0$ vérifie $p \circ p$.
On écrit $x \in E$ comme $x = (x - p(x)) + p(x)$. Comme $x - p(x) \in Kerp$ et $p(x) \in Imp$ ceci prouve que $F + G = E$. De plus, si $y \in Kerp \cap Imp$, alprs $y = p(z)$ et $p(y) = 0$ d'où $p \circ p(z) = 0$ mais $p \circ p = p$ donc $p(z) = 0$ donc $y = p(z) = 0$.

Exercice 3 Soit $E = \mathbb{C}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes.

1. Montrer que E est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. Le sous-ensemble $F = \mathbb{R}[X]$ est-il un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel ? Pourquoi ?
3. Le sous-ensemble $F = \mathbb{R}[X]$ est-il un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel ? Pourquoi ?

Corrigé Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Il est déjà muni d'une addition comme $\mathbb{C}$-eV. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut restreindre la multiplication de $\mathbb{C} \times E \to E$ qui à $(\lambda \in \mathbb{C}, x \in E)$ associe $\lambda.x$ en une multplication de $\mathbb{R} \times E$ dans E.

$\mathbb{R}[X]$ n'est pas un C-ev. Par exemple, $i.X$ n'est pas un polynome à coefficients réels.

$\mathbb{R}[X]$ est un $\mathbb{R}$-sous eV du $\mathbb{R}$-eV E. En effet, il est non vide, il est stable par addition (la somme de deux polynômes à coefficients réels est un polynôme à coefficients réels) et par multiplication par un nombre réel : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ alors $\lambda P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 Soit $G = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Soit $H = \{P \in G, P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de G.
2. Montrer que H est inclus strictement dans G.
3. Montrer que les polynômes P_1, P_2, P_2 et P_4 définis par $P_1(X) = 6 - X^3$, $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X$, $P_3(X) = X^2 - 3X + 1$, et $P_4(X) = X^3 - X^2 - 4$ sont dans H.
4. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre dans G ? Et dans H?
5. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle génératrice dans G? Et dans H ?
6. Trouver une base de H

Corrigé H est non vide car le polynôme nul est dans H. H est stable par addition : si $P \in H$ et $Q \in H$, alors

$$(P+Q)(0)+(P+Q)'(0)+(P+Q)''(0)+(P+Q)'''(0) = P(0)+P'(0)+P''(0)+P'''(0)+Q(0)+Q'(0)+Q''(0)+Q'''(0) = 0$$

H est stable par multiplication par un nombre : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in H$, alors

$$(\lambda P)(0) + (\lambda P)'(0) + (\lambda P)''(0) + (\lambda P)'''(0) = \lambda\left(P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0)\right) = \lambda.0 = 0$$

H est strictement inclus dans G car le polynôme $P(X) = 1$ n'est pas dans H.

Le fait que P_1, P_2, P_3 et P_4 soient dans H est une simple vérification.

L'ev G est de dimension 4 donc H est de dimension au plus 3. Or la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est dans H donc elle ne peut pas être libre, sinon elle engendrerait un sous eV de dimension 4. Être libre dans G ou dans H c'est la même chose. Donc elle ne peut pas être libre ni dans G ni dans H.

La famille $P_1, \dots P_4$ est incluse dans H, elle ne peut donc pas être génératrice de tout G, puisque H est strictement inclus dans G.

Les polynômes P_1, P_2, P_3 forment une famille libre. En effet, si $\alpha P_1 + \beta P_3 + \gamma P_4 = 0$, alors $\alpha P_1'(0) + \beta P_3'(0) + \gamma P_4'(0) = 0$, ce qui donne $-3\beta = 0$ donc $\beta = 0$ et $\alpha P_1''(0) + \beta P_3''(0) + \gamma P_4''(0) = 0$ ce qui donne de même $\gamma = 0$ et finalement $\alpha = 0$ aussi. Donc $\dim H \geq 3$ donc $\dim H = 3$ donc (P_1, P_3, P_4) est une famille libre de 3 vecteurs de H de dim 3, c'est donc une base de H.

Exercice 5 Calculer les déterminants des matrices suivantes de la manière la plus rapide possible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \\ 9 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -\sqrt{2} & 3 & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Corrigé On développe $\det A$ suivant la troisième colonne.

$$\det A = (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 9 & 5 & 0 \\ 5 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -225 - 130 = -355$$

La matrice B a manifestement ses colonnes liées, donc $\det B = 0$.

Exercice 6 Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbf{R}^4$ et (E_1, E_2, E_3) la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit f l'application linéaire de $\mathbf{R}^4$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (X, Y, Z)$ avec

$$X = x - y + z + t, Y = x + 2z - t, Z = x + y + 3z - 3t.$$

1. Quelle est la matrice A de f dans les bases canoniques (e_1, e_2, e_3, e_4) et (E_1, E_2, E_3).
2. Montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im} f$ et que $\mathcal{B} = (f(e_1), f(e_2), E_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
3. Montrer que $\ker f$ est de dimension 2 et donner une base (u_1, u_2) de $\ker f$.
4. Vérifier que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, u_1, u_2)$ est une base de $\mathbf{R}^4$.
5. Quelle est la matrice B de f de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$?
6. Quelle est la matrice P de l'identité de $\mathbb{R}^4$ de la base $\mathcal{C}$ vers la base canonique $(e_1, \ldots, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$?
7. Quelle est la matrice Q de l'identité de $\mathbb{R}^3$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base canonique (E_1, E_2, E_3) de $\mathbb{R}^3$?
8. Quelle relation satisfont les matrices A, B, P, Q ?

Corrigé La matrice A vaut $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

L'image $Im(f)$ est engendrée par les vecteurs colonnes de A. L'algorithme de Gauss Jordan aboutit à $Frel(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc f est de rang 2, et $Im(f)$ est de dimension 2. Les deux premières colonnes de A sont les coordonnées de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. Il est donc clair (règle des zéros par exemple) que ces vecteurs ne sont pas colinéaires. L'algorithme de Gauss Jordan montre que la famille $(f(e_1), f(e_2), E_3)$ est libre, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$ de dim 3.

Le théorème du rang nous dit que $rg(f) + \dim Kerf = 4$. Donc $Ker(f)$ est de dimension 2. La forme de $Frel(A)$ nous donne les relations de liaison suivantes entre les colonnes : $C_3 = 2C_1 + C_2$ et $C_4 = -C_1 - 2C_2$, ce qui nous donne deux vecteurs $u_1 = (2, 1, -1, 0)$ et $u_2 = (1, 2, 0, 1)$ indépendants l'un de l'autre dans $Ker(f)$. L'argument de dimension assure que c'est une base de $Ker(f)$.

L'algorithme de gauss Jordan assure que (e_1, e_2, u_1, u_2) est libre, donc une base de $\mathbb{R}^4$ (car 4 vecteurs dans $\mathbb{R}^4$ de dim 4)

La matrice B s'obtient immédiatement : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice P vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice Q vaut $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et on vérifie que $B = Q^{-1}AP$, avec $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'examen - vendredi 16 décembre 2016

Exercice 1 (Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels, environ 10 minutes, $\simeq$ 2 points)

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Donner la définition d'un *sous-espace vectoriel de E.*
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Dessinez l'ensemble $A_1 = \{(x, y) \in E, 2x + 3y = 0\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
3. Dessinez l'ensemble $A_2 = \{(x, y) \in E, 2x + 3y = 1\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
4. Dessinez l'ensemble $A_3 = \{(x, y) \in E, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?
5. Dessinez l'ensemble $A_4 = \{(x, y) \in E, x^2 = y^2\}$. Est-ce un sous-espace vectoriel de E ?

Corrigé Un sev de E est un sous-ensemble de E qui contient 0_E, qui est stable par addition ($\vec{x} \in E$ et $\vec{y} \in E$ impliquent $\vec{x} + \vec{y} \in E$) et stable par multiplication par un scalaire ($\vec{x} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ impliquent $\lambda.\vec{x} \in E$.)

A_1 est une droite passant par l'origine. C'est un sev: $0 \in A_1$, et A_1 est stable par addition et multiplication par un scalaire.

A_2 est une droite affine, ne passant pas par l'origine. $0 \notin A_2$ donc A_2 pas seV.

A_3 est le disque de rayon 1 centré en $(0, 0)$. Ce n'est pas un sev. Par exemple, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont dans A_3 mais leur somme $(1, 1)$ n'est pas dans A_3.

A_4 est l'union des deux droites d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$. Il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire, mais pas par addition : $(1, 1)$ et $(-1, 1)$ sont dans A_4 mais pas $(0, 2)$.

Exercice 2 (Applications linéaires, environ 10 minutes, $\simeq$ 3 points)

1. Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Rappelez la définition de f *est une application linéaire de E dans F.*
2. Même question lorsque E et F sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels ?
3. L'application $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_1(x, y, z, t) = (y - z, 2xy, t - x)$ est-elle linéaire ?
4. L'application $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ définie par $f_2(x) = (2x, 0, -x, \sqrt{2}x)$ est-elle linéaire ?
5. L'application $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(x, y) = (x - y, 2y, x + 1)$ est-elle linéaire ?
6. On identifie un élément $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ au point (x, y) de $\mathbb{R}^2$. Soit $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application $z \to \bar{z}$. Montrer que f_4 n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, i.e. pas linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
7. Dans l'identification de $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$, comment s'écrit l'image d'un point (x, y) par f_4 ? Montrer que f_4 est $\mathbb{R}$-linéaire, i.e. linéaire comme application du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Corrigé f est linéaire si $f(0_E) = 0_F$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in E$ et $f(\lambda x) = \lambda f(x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si E et F sont deux $\mathbb{C}$ espaces vectoriels la seule différence est qu'il faut prendre $\lambda \in \mathbb{C}$.

$f_1(2, 2, 0, 0) = (2, 8, -2)$ alors que $f_1(1, 1, 0, 0) = (1, 2, -1)$ donc $f_1(2, 2, 0, 0) \neq 2.f_1(1, 1, 0, 0)$.

f_2 est linéaire, soit d'après le cours, soit en vérifiant à la main.

$f_3(0, 0) = (0, 0, 1) \neq (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc f_3 n'est pas linéaire.

Si $\lambda = i$ et $z = i$ on voit que $f(\lambda.z) = f(-1) = -1$ tandis que $\lambda f(z) = i.\bar{i} = -i^2 = 1$. Donc f_4 n'est pas linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-ev. En revanche, si on voit un point $z = x + iy$ de $\mathbb{C}$ comme le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f_4 est l'application qui à (x, y) associe $(x, -y)$. Elle est donc $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (Diagonalisation, environ 5minutes, $\simeq$ 2 points)

1. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui n'a aucune valeur propre ? Si oui lequel ?
2. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui n'a aucune valeur propre ? Si oui lequel ?
3. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a une valeur propre et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
4. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a deux valeurs propres distinctes et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
5. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a une valeur propre et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?
6. Pouvez-vous donner un exemple d'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a deux valeurs propres distinctes et qui n'est pas diagonalisable ? Si oui lequel ?

Corrigé La rotation d'angle $\pi/2$ n'a aucune valeur propre, et aucune direction propre, car elle fait tourner toutes les droites. N'importe quelle rotation d'angle différent de 0 ou π modulo 2π n'a aucune valeur propre non plus pour la même raison.

Dans $\mathbb{R}^3$, toutes les applications linéaires ont au moins une valeur propre. En effet , leur polynôme caractéristique est de degré trois, il a donc au moins une racine, qui est une valeur propre.

Dans $\mathbb{R}^2$, l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a une valeur propre, son polynôme caractéristique est $(X - 2)^2$ mais elle n'est pas diagonalisable, sinon ce serait $2.Id$.

Une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui a 2 valeurs propres distinctes est diagonalisable par un théorème du cours (très facile : 2 VP distinctes, donc deux espaces propres supplémentaires, donc on peut trouver deux vecteurs propres indépendants, et on est en dimension 2, donc ils forment une base).

Dans $\mathbb{R}^3$ la rotation d'axe $\mathbb{R}.e_3$ et d'angle $\pi/2$ a une valeur propre, 1, avec espace propre associÃ© l'axe de la rotation (qui est fixé par la rotation, d'où la valeur propre 1), mais toutes les autres directions tournent par la rotation, donc pas d'autre direction propre. Matriciellement, la matrice est $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique est $(X-1)(X^2+1)$ et la seule valeur propre est 1 et l'espace propre associé est de dimension 1. Donc elle n'est pas diagonalisable.

Dans $\mathbb{R}^3$ l'application dont la matrice est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $(X_2)^2(X-1)$; elle a 2 valeurs propres, 2 et 1. Mais ses espaces propres sont chacun de dimension 1 donc elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 4 (Espaces vectoriels de polynômes, environ 10 minutes, $\simeq$ 3 points) Soit $G = \mathbb{R}_3[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Soit $H = \{P \in G, P(0) + P'(0) + P''(0) + P'''(0) = 0\}$. Pourquoi H est-il un sous-espace vectoriel de G?
2. Montrez que H est inclus strictement dans G.
3. Qu'est-ce que cela signifie sur la dimension de G et de H ?
4. On suppose déjà vérifié que les polynômes P_1, P_2, P_2 et P_4 définis par $P_1(X) = 6 - X^3$, $P_2(X) = X^3 - 2X^2 - 2X$, $P_3(X) = X^2 - 3X + 1$, et $P_4(X) = X^3 - X^2 - 4$ sont dans H.
5. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle libre dans G ?
6. Pouvez-vous en déduire si elle est libre ou pas dans H?
7. La famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle génératrice dans G?
8. Est-elle génératrice dans H ?

Â **Corrigé** Déjà vu au partiel. H est un sev car défini par une équation linéaire.

H est strictement inclus dans G par exemple car le polynôme $P(X) = X$ n'est pas dans H. Donc $\dim H < \dim G = 4$.

Si la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) était libre dans G ce serait une base de G qui est de dimension 4. Elle serait donc génératrice. Or $Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) \subset H$. Donc cette famille n'est pas génératrice de tout G. Donc pas libre dans G.

Etre libre dans G ou dans H c'est pareil, elle n'est donc pas libre dans H.

Cette famille n'est pas génératrice dans G. En revanche, rien ne lui interdit d'être génératrice dans H. Dans H, on vérifie aisément que P_1, P_2, P_3 forment une famille libre, donc $Vect(P_1, P_2, P_3)$ est de dimension 3. Mais

$$Vect(P_1, P_2, P_3) \subset Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) \subset H$$

et H est de dimension 3. DOnc $Vect(P_1, P_2, P_3) = Vect(P_1, P_2, P_3, P_4) = H$ et la famille (P_1, P_2, P_3, P_4) est génératrice.

Exercice 5 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^4$, et $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z, t) = (-4x - 32y + 4z + 18t, 6y - 3t, -2x - 10y + 2z + 6t, 6y - 3t) .$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de E.
2. Pouvez-vous dire avant tout calcul si f est diagonalisable ou pas ?
3. Calculez son polynôme caractéristique.
4. Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Pouvez-vous en déduire directement si elle est diagonalisable ou pas ?
6. Calculez les espaces propres de f.
7. Donnez une base (b_1, b_2, b_3, b_4) de E constituée de vecteurs propres de f.
8. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3, b_4).
9. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3, b_4) vers (e_1, e_2, e_3, e_4).
10. Calculez P^{-1}.
11. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.
12. Comment fait-on pour calculer A^{17} ? On ne demande pas le résultat du calcul mais la méthode.

On a $A = \begin{pmatrix} -4 & -32 & 4 & 18 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \\ -2 & -10 & 2 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ Elle n'est pas symétrique, on ne peut donc rien dire avant calcul. Son polynôme caractéristique se calcule en développant par rapport à la 2me ligne par exemple. On trouve

$$\chi_f(X) = \begin{vmatrix} X+4 & 32 & -4 & -18 \\ 0 & X-6 & 0 & 3 \\ 2 & 10 & X-2 & 6 \\ 0 & -6 & 0 & X+3 \end{vmatrix} = \cdots = X^2(X-3)(X+2)$$

Les valeurs propres sont $0, 3, -2$. Elle n'a que 3 valeurs propres dans $\mathbb{R}^4$, on ne peut encore pas en déduire si elle est diagonalisable ou pas. On calcule par Gauss Jordan

$$E_0 = Kerf = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux vecteurs forment une base deE_0. De même, par Gauss Jordan,

$$E_{-2} = Ker(f + 2Id) = Ker(A + 2I_4) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Et pour finir $E_3 = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On prend $b_1 = (1, -1, 2, -2)$, $b_2 = (1, 0, 1, 0)$, $b_3 = (2, 0, 1, 0)$ et $b_4 = (-2, 1, 0, 1)$. La matrice D de f dans la base (b_i) est $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice de passage P de la base (b_i) vers la base (e_i) est $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule son inverse par Gauss Jordan, et on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Le diagramme usuel nous dit que $A = PDP^{-1}$ de sorte que

$$A^{17} = PD^{17}P^{-1} = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{17} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{17} \end{pmatrix}.P^{-1}.$$

Exercice 6 (Diagonalisation, environ 25 minutes, $\simeq$ 6 points) Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{6}(-5x + 4y + 13z, 4x + 4y + 4z, 13x + 4y - 5z)$$

1. Donnez la matrice A de f dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) de E.
2. Pouvez-vous dire avant tout calcul si f est diagonalisable ou pas ?
3. Calculez son polynôme caractéristique.
4. Donnez les valeurs propres de f.
5. Calculez les espaces propres de f.
6. Donnez une base (b_1, b_2, b_3) de E qui est *orthonormée* et constituée de vecteurs propres de f.
7. Donnez (sans calculs) la matrice D de f dans la base (b_1, b_2, b_3).
8. Donnez la matrice P de l'application identité de (b_1, b_2, b_3) vers (e_1, e_2, e_3).
9. Donnez P^{-1}.
10. Faites un diagramme et donnez la relation entre A, P, D, P^{-1}.

La matrice A est $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 13 \\ 4 & 4 & 4 \\ 13 & 4 & -5 \end{pmatrix}$. Elle est symétrique de sorte qu'on sait, d'après le cours, que f est diagonalisable. So,n polynôme caractéristique est

$$\chi_A(X) = \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} X+5 & -4 & -13 \\ -4 & X-4 & -4 \\ -13 & -4 & X+5 \end{vmatrix} = X(X-2)(X+3).$$

On sait alors aussi d'après un autre théorème du cours que comme f a 3 valeurs propres distinctes, 0, 2 et -3, elle est diagonalisable. Mais on le savait déjà. On calcule par Gauss Jordan $E_2 = Ker(A - 2I_3) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. De même

$E_0 = KerA = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_3 = Ker(A + 3I_3) = Vect \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On veut une base orthonormée de vecteurs propres. On pose alors

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Comme d'habitude le diagramme donne $A = PDP^{-1}$.