Contrôle continu numéro 1 - 45 minutes - mercredi 7 octobre 2015

Exercice 1 a) Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Vous justifierez très soigneusement votre réponse

$$\begin{aligned} f_1 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (xy, 2x, y) \in \mathbb{R}^3 \\ f_2 : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 &\mapsto (3x+y, y+z) \in \mathbb{R}^2 \\ f_3 : (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 &\mapsto (x-t, y-t, t, x+y+z, x+y+z+t) \in \mathbb{R}^5 \end{aligned}$$

b) Pour celles qui sont linéaires, calculer leur noyau $\ker f_i$ et leur image Imf_i. En déduire lesquelles sont injectives, ou surjectives, ou bijectives.

Exercice 2 (Algèbre linéaire et nombres complexes) a) Soit Φ l'application linéaire de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ définie par $\Phi(z_1, z_2) = ((2+i)z_1 - 3iz_2, 3z_1 - (1+i)z_2)$. On admet que (vous savez montrer) que Φ est $\mathbb{C}$-linéaire. Ecrire sa matrice dans $M_2(\mathbb{C})$.
b) On note (Φ_1, Φ_2) les applications coordonnées de Φ, c'est-à-dire $\Phi_1(z_1, z_2) = (2+i)z_1 - 3iz_2$, et $\Phi_2(z_1, z_2) = 3z_1 - (1+i)z_2$. Soit $\widetilde{\Phi}$ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$\widetilde{\Phi}(x_1, y_1, x_2, y_2) =$$
$$(\mathrm{Re}\Phi_1(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Im}\Phi_1(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Re}\Phi_2(x_1+iy_1, x_2+iy_2), \mathrm{Im}\Phi_2(x_1+iy_1, x_2+iy_2))$$

On admet que (vous savez montrer) que $\tilde{\Phi}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Donner sa matrice dans $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Montrer que c'est un espace vectoriel.

Exercice 4 (Algèbre linéaire et géométrie) Donner sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

- La réflexion par rapport à la droite d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^2$
- la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = -x$ dans $\mathbb{R}^2$
- la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/3$ dans $\mathbb{R}^2$
- la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $y = 0$
- la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $z = 0$

Université Rennes 1 L2 MIASHS - AL2E - 2015/2016 UFR Mathématiques
Barbara Schapira

Contrôle continu numéro 2- 45 minutes - mercredi 4 novembre 2015

Mise en garde : Les exercices sont **indépendants**. Chaque question à 1 point doit prendre au plus 2 minutes et chaque question à 2 points ... au plus 4 minutes.
Le barême est indicatif et pourra être modifié.

Exercice 1 (Dessins, 1,5 points)

1. Dessiner deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont supplémentaires l'un de l'autre.
2. Dessiner deux vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^3$
3. Dessiner trois vecteurs liés dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 (Changement de base, 8 points) Soit $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $\mathcal{B}' = ((1,2),(2,-1))$.

1. (1 points) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. (1 point) Ecrire la matrice P de l'application Id de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$.
3. (1 points) Décomposer les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ dans la base $\mathcal{B}'$.
4. (1 point) Ecrire la matrice Q de l'application Id de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}')$.
5. (1 point) Quelle est la relation entre P et Q ?
6. (1 point) Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\frac{14x-2y}{5}, \frac{-2x+11y}{5})$. Donner sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
7. (2 points) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3 (Dualité, 5,5 points) Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. Soit $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ la base usuelle de E. On note $e_1 = 1$, $e_2 = X$, $e_3 = X^2$.

1. (1,5 point) Rappeler la signification de la notation E^*.
2. (1,5 point) Rappeler la définition de e_1^*, e_2^* et e_3^*.
3. (1 point) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(P) = P(0)$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ définie par $g(P) = P'(0)$. Soit $h : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(P) = \frac{1}{2}P''(0)$. Si $P(X) = aX^2 + bX + c$, écrire explicitement son image par f, g, h.
4. (1,5 point) Comparer f, g, h, avec e_1^*, e_2^* et e_3^*.

Exercice 4 (Algèbre linéaire et géométrie, 5 points) Donner sans justification les matrices des applications linéaires suivantes.

1. (1pt) la réflexion par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$
2. (1pt) la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$
3. (1pt) la projection orthogonale de $\mathbb{R}^3$ sur le plan d'équation $x = 0$
4. (1pt) la réflexion de $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan d'équation $y = 0$
5. (1pt) l'homothétie de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rapport -3.

Examen - 2 heures - Jeudi 17 décembre 2015

Mise en garde :

Les exercices sont **indépendants**.
Le barême est indicatif et pourra être modifié.
Les temps indiqués sont indicatifs mais pas obligatoires.
Il est recommandé de **lire** tout le sujet avant de commencer.
La **rédaction** comptera beaucoup dans la notation.
Une **phrase de conclusion** - au minimum - est attendue à chaque exercice.

Exercice 1 (Dessins : 1 point - 5 minutes)

1. Dessiner deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$ n'ayant aucun vecteur en commun.
2. Dessiner trois vecteurs indépendants dans $\mathbb{R}^3$.
3. Dessiner deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 (Questions de cours : 3 points - 10 minutes)

1. Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'une application linéaire.
2. Rappeler la définition d'une application linéaire diagonalisable.
3. Donner un exemple d'application linéaire diagonalisable dans $\mathbb{R}^2$.
4. Donner un exemple d'application linéaire non diagonalisable dans $\mathbb{C}^2$.
5. Rappeler la définition du polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3 (Géométrie et diagonalisation (1) : 1,5 points - 10 minutes)
On considère la rotation r de centre O et d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Dessiner la base canonique et son image par r.
2. Donner la matrice de r dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La rotation r a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La rotation r est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation.
7. Si oui, toujours, donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 4 (Géométrie et diagonalisation (2) : 2 points - 10 minutes)
On considère la rotation ρ d'axe vertical $\mathbb{R}.e_3$ et d'angle π dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par ρ.
2. Donner la matrice de ρ dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La rotation ρ a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La rotation ρ est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation.
7. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 5 (Géométrie et diagonalisation (3) : 2 points - 10 minutes)
On considère la projection P sur le plan d'équation $y = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par P.
2. Donner la matrice de P dans la base canonique,
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La projection P a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La projection P est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.

Exercice 6 (Géométrie et diagonalisation (4) : 2 points - 10 minutes)
On considère la symétrie σ par rapport à l'axe $\mathbb{R}.e_1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Dessiner la base canonique et son image par σ.
2. Donner la matrice de σ dans la base canonique.
3. Calculer son déterminant (par un argument géométrique ou un calcul matriciel).
4. La symétrie σ a-t-elle des valeurs propres et des vecteurs propres ? Si oui lesquels ?
5. La symétrie σ est-elle diagonalisable ?
6. Si oui, donner une base de diagonalisation. Donner la matrice de l'application identité de la base de diagonalisation vers la base canonique.
7. Comparer avec ρ ?

Exercice 7 (Polynomes et dualité : 3 points - 15 minutes)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Donner une base de E. Quelle est sa dimension ?

2. Donner la définition du dual de E.

3. Soit $\varphi_0 : P \to P(0)$, $\varphi_1 : P \to P(1)$ $\varphi_2 : P \to P(2)$ trois applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$. Forment-elles une famille libre de E^* ? génératrice ?

4. Donner une base de E^*.

Exercice 8 (Diagonalisation : 6 points - 35 minutes)
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tels que dans la base canonique (e_1, e_2, e_3), on ait :

$$Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Mat_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Pouvez-vous dire sans calcul si l'une des deux applications est diagonalisable ? Pourquoi ?

2. Calculer leurs polynômes caractéristiques.

3. Pouvez-vous dire sans calcul si l'une d'elle est diagonalisable ? Pourquoi ?

4. Si f est diagonalisable, donner une base de diagonalisation, la matrice A' de f dans cette base, la matrice P de l'identité de la base de diagonalisation vers la base canonique, ainsi que son inverse P^{-1}.

5. Donner l'expression de A^n, pour $n \geq 1$ entier.

6. Si g est diagonalisable, donner une base de diagonalisation **orthonormée**, la matrice B' de g dans cette base, la matrice Q de l'identité de la base de diagonalisation vers la base canonique, ainsi que son inverse Q^{-1}.

7. Donner l'expression de B^n, pour $n \geq 1$ entier.