Algèbre linéaire pour l'économie - TD 9 :Endomorphismes symétriques
Séances des 4 et 7 décembre

Exercice 1 Dire si les applications suivantes sont des produits scalaires sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$:

1. $((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$
2. $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$
3. $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_2 + x_2y_1 + x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$

Exercice 2 1. Montrer que

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \mapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$$

définit un produit scalaire sur $\mathbf{R}^3$.

2. Déterminer alors la partie orthogonale au sous-espace défini par $x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$.

Exercice 3 Pour chacune des matrices suivantes, appelée A, trouver une matrice P telle que $P^{-1} = {}^tP$ et ${}^tPAP = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 *Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par*

$$u_1 := (1, 1, 1, 1), \quad u_2 := (-1, -1, -2, 2), \quad u_3 := (-1, 5, -4, 8) \quad \text{et} \quad u_4 := (-3, 1, -5, 3).$$

Montrer que $F^\perp$ est une droite dont on déterminera un vecteur directeur. En déduire que F est un hyperplan dont on donnera une équation.

Exercice 5 1. Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel montrer que

$$(u_1 := (1, 0, 0), \quad u_2 := (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{et} \quad u_3 := (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1))$$

forment une base orthonormée.

2. Déterminer la projection orthogonale de $u := (7, 5, 9)$ sur le plan H engendré par v_1 et v_2.
3. Même question avec le plan engendré par v_2 et v_3

Exercice 6 Dans l'espace vectoriel euclidien $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base

$$(v_1 := (3, 1, 1), v_2 := (2, 1, 0), v_3 := (-1, -1, -1))$$

pour obtenir une base orthonormée.

Exercice 7 Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$.