

Algèbre linéaire pour l'économie - TD 8 : Réduction des endomorphismes
Séances des 25 , 30 novembre et 2 décembre

Exercice 1 Lorsque c'est possible, diagonaliser les matrices suivantes :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 Pour quelles valeurs de a, b et c les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ?

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Exercice 3 La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est-elle diagonalisable sur \mathbf{R} ? sur \mathbf{C} ?

Exercice 4 Soient a un réel et f l'endomorphisme de \mathbf{R}^3 dont la matrice A par rapport à la base canonique est donnée par

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de A . Pour quelles valeurs du paramètre a le noyau de f n'est-il pas réduit à $\{0\}$? Justifier.
2. Montrer que le polynôme caractéristique P de f vérifie $P = (X - 3)Q$, où Q est un polynôme que l'on déterminera. Pour quelles valeurs de a le nombre 3 est-il racine multiple de P ?
3. Déterminer, en fonction de a , les valeurs propres de f , leurs multiplicités et la dimension des sous espaces propres associés. Que pouvez-vous en conclure ?

Exercice 5 Diagonaliser la matrice A suivante et calculer A^n :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 6 Soit u l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[X]_{\leq 2} & \xrightarrow{u} & \mathbf{R}[X]_{\leq 2} \\ P & \longmapsto & (2X + 1)P - (X^2 - 1)P' \end{array}$$

Montrer que u est bien définie et linéaire. Déterminer les valeurs propres de u et, si c'est possible, diagonaliser u .