Feuille 7: Corrigé d'exercices

December 11, 2018

En cours, nous avons vu que le polynôme caractéristique d'une matrice A était défini comme $\chi_A(X) = \det(X.Id - A)$. Il y a deux conventions différentes en mathématiques. En TD les groupes 1 et 3 ont utilisé $\det(A - X.Id)$. Cela ne change que le signe du résultat, mais pas les théorèmes ni les calculs pratiques.

Dans les exercices suivants, je calcule le polynôme caratéristique d'une matrice A par la formule $P_A(X) = det(A - X.Id)$. Si vous voulez calculer par la formule $_A(X) = det(X.Id - A)$, les calculs (et donc le polynôme) peuvent varier un peu mais peu importe, les valeurs propres (racines du polynôme) obtenues sont les mêmes!

Exercice 1. 1. $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Notons $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est A_1.

Étape 1: Calculer le polynôme caractéristique de :

$$\begin{aligned} P_f(X) = det(A_1 - X.Id) &= det \begin{pmatrix} -1-X & 1 & 0 \\ 0 & -1-X & 1 \\ 1 & 0 & -1-X \end{pmatrix} \\ &= (-1-X)det \begin{pmatrix} -1-X & 1 \\ 0 & -1-X \end{pmatrix} + 1.det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1-X & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1-X)(-1-X)(-1-X) + 1 = 1 - (1+X)^3 \\ &= -X(X^2 + 3X + 3) \end{aligned}$$

Étape 2 Chercher les racines de $P_{A_1}(X)$:
$P_f(X) = 0 \to -X(X^2 + 3X + 3) = 0 \to X = 0$ ou $X^2 + 3X + 3 = 0$,
$\to X = 0$ ou $X = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ ou $X = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$.
Rappel: Les racines (complexes) du polynôme $P(X) : aX^2 + bX + c$ sont $X = \frac{-b+\sqrt{\triangle}}{2}$,et $X = \frac{-b-\sqrt{\triangle}}{2}$, où $\triangle = b^2 - 4ac$.
Remarque: *Le polynôme caractéristique a des racines qui ne sont pas réelles $\Rightarrow$ la matrice A_1 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ $\to$ on va la diagonaliser sur $\mathbb{C}$.*
Notons maintenant $g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ l'application $\mathbb{C}$ -linéaire dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est A_1. L'étape précédente nous dit que le polynôme caractéristique

de g a 3 racines: $X=1, X=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}, X=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ donc ce sont 3 valeurs propres de g.
Étape 3: Calculer les espaces propres:

$X=0$: $E_0=\{v\in\mathbb{C}^3 : g(v)=0.v=0\}=Ker(g)$ Pratiquons GJ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\1&0&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&1&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases}x\quad -z=0\\ \quad y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\quad =z\\ \quad y=z\end{cases}$.
Donc $E_0=\{(z,z,z),z\in\mathbb{C}\}=Vect_{\mathbb{C}}((1,1,1))\Rightarrow\dim_{\mathbb{C}}(E_0)=1$

$X=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$: $E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}}=\{v\in\mathbb{C}^3 : g(v)=\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}.v\}=Ker(g-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}.Id)$.

$$A_1-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}Id=\begin{pmatrix}-1-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&-1-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}&1\\1&0&-1-\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1\\1&0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

GJ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1&0&0\\0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1&0\\1&0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{1-i\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1&0\\1&0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{1-i\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{1-i\sqrt{3}}&0&0\\0&1&\frac{2}{1-i\sqrt{3}}&0\\0&\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}&\frac{1-i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{-4}{(1-i\sqrt{3})^2}&0\\0&1&\frac{2}{1-i\sqrt{3}}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

Cela nous donne:

$$\begin{cases}x-\frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2}z=0\\y+\frac{2}{1-i\sqrt{3}}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2}z\\y=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}z\end{cases}$$

Finalement, $E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}}=\{(\frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2}z,\frac{-2}{1-i\sqrt{3}}z,z),z\in\mathbb{C}\}=Vect_{\mathbb{C}}(\frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2},\frac{-2}{1-i\sqrt{3}},1)$
$\Rightarrow\dim_{\mathbb{C}}(E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}})=1$.

$X=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$:
$E_{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}}=\{v\in\mathbb{C}^3 : g(v)=\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}.v\}=Ker(g-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}.Id)$.

$$A_1-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}Id=\begin{pmatrix}-1-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&-1-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}&1\\1&0&-1-\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1\\1&0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

GJ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1&0&0\\0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1&0\\1&0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{1+i\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1&0\\1&0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{2}{1+i\sqrt{3}}&0&0\\0&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&1&0\\0&\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}&\frac{1+i\sqrt{3}}{2}&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{1+i\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{1+i\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} & \frac{1+i\sqrt{3}}{2} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-4}{(1+i\sqrt{3})^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{1+i\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Cela nous donne:

$$\begin{cases} x - \frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2} z = 0 \\ y + \frac{2}{1+i\sqrt{3}} z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2} z \\ y = -\frac{2}{1+i\sqrt{3}} z \end{cases}$$

Finalement, $E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}} = \{(\frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2} z, \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} z, z), z \in \mathbb{C}\} = Vect_{\mathbb{C}}(\frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2}, \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}, 1)$
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(E_{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}}) = 1$.

Étape 4 Conclure:
On a $\dim_{\mathbb{C}}(E_0) + \dim_{\mathbb{C}}(E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}}) + \dim_{\mathbb{C}}(E_{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}}) = 1 + 1 + 1 = 3 = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$. D'où la matrice A_1 (et l'application linéaire g) est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
Notons $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, ici :
$v_1 = (1, 1, 1)$(base de E_0)
$v_2 = (\frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2}, \frac{-2}{1-i\sqrt{3}}, 1)$(base de $E_{\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}}$)
$v_3 = (\frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2}, \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}, 1)$(base de $E_{\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}}$).
Alors la matrice de passage pour la diagonalisation est

$$P = (v_1|v_2|v_3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{(1-i\sqrt{3})^2} & \frac{4}{(1+i\sqrt{3})^2} \\ 1 & \frac{-2}{1-i\sqrt{3}} & \frac{-2}{1+i\sqrt{3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on a

$$P^{-1}.A_1.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, après la diagonalisation **sur** $\mathbb{C}$, on a trouvé une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^3$ contenant des vecteurs propres de g et la matrice de g dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Remarque: *Si on choisit* $P' = (v_2|v_1|v_3)$ *et la base* $\mathcal{B}' = \{v_2, v_1, v_3\}$, *alors* $P'^{-1}.A_1.P' = \begin{pmatrix} \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire associée.

- $$P_{A_2}(X) = det(A_2 - X.Id) = det\begin{pmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 1 & -X & -1 \\ 2 & -2 & 1-X \end{pmatrix}$$
$$= (2-X)det\begin{pmatrix} -X & -1 \\ -2 & 1-X \end{pmatrix} - 1.det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1-X \end{pmatrix} + 2.det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -X & -1 \end{pmatrix}$$
$$= (2-X)[-X(1-X)-2] - [(X-1)+2] + 2(1+X)$$
$$= (2-X)(X^2-X-2) - (X+1) + 2(1+X) = (2-X)(X+1)(X-2) + (X+1)$$
$$= (X+1)(-X^2+4X-3) = (X+1)(1-X)(X-3)$$

- $-1, 1, 3$ sont des racines de $P_{A_2}(X)$ donc ce sont 3 valeurs propres de f.
- $X = -1 :\ E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = -1.v\} = Ker(f - (-1)Id)$
GJ:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{-4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right)$$
$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Cela nous donne:
$$\begin{cases} x & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = 0 \\ y & = z \end{cases}$$
$\Rightarrow E_{-1} = \{(0, z, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect(0, 1, 1)$, $\dim(E_{-1}) = 1$ et $(0, 1, 1)$ est une base de E_{-1}.
- $X = 1 :\ E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 1.v\} = Ker(f - 1)Id)$
GJ:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Cela nous donne:
$$\begin{cases} x - y & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = y \\ z & = 0 \end{cases}$$
$\Rightarrow E_1 = \{(y, y, 0), y \in \mathbb{R}\} = Vect(1, 1, 0)$, $\dim(E_1) = 1$ et $(1, 1, 0)$ est une base de E_1.
- $X = 3 :\ E_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 3.v\} = Ker(f - 3)Id)$
GJ:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Cela nous donne:
$$\begin{cases} x - z & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x & = z \\ y & = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow E_3 = \{(z,0,z), z \in \mathbb{R}\} = Vect(1,0,1)$, $\dim(E_3) = 1$ et $(1,0,1)$ est une base de E_3.

- On a $dim(E_{-1}) + dim(E_1) + dim(E_3) = 1+1+1 = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc A_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons: $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage pour la diagonalisation, alors $P^{-1}A_2.P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $$\begin{aligned} P_{A_3}(X) = det(A_3 - X.Id) &= det\begin{pmatrix} 3-X & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -3-X & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1-X \end{pmatrix} \\ &= X(X-1)^2(X+1) \end{aligned}$$

  $\rightarrow X=0, X=1, X=-1$ sont des racines du polynôme caractéristique.

- : $X=0$, $E_0 = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 0.v\} = Ker(f)$

  GJ:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{-4}{3} & \frac{-5}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{Cela implique} \begin{cases} x + \frac{1}{2}t \\ y - \frac{1}{2}t = 0 \\ z + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x &= \frac{-1}{2}t \\ y &= \frac{1}{2}t \\ z &= -t \end{cases}$$

  $\rightarrow E_0 = \{(\frac{-1}{2}t, \frac{1}{2}t, -t, t), t \in \mathbb{R}\} = Vect((\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 1)) \Rightarrow dim(E_0) = 1$

- $X = -1$, $E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = -1.v\} = Ker(f - (-1)Id)$

  GJ:

  $$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & -1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-3}{4} & -1 & \frac{-1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & \frac{-3}{4} & -1 & \frac{-1}{4} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & \frac{-5}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Cela implique $\begin{cases} x - z \\ y = 0 \\ t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \ \ = z \\ \ \ y = 0 \\ t \ \ \ = 0 \end{cases}$

$\to E_0 = \{(z, 0, z, 0), z \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 0, 1, 0)) \Rightarrow dim(E_{-1}) = 1$

- $X = 1$, $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 1.v\} = Ker(f - 1)Id)$
  GJ:
  $$\left(\begin{array}{cccc|c}2 & -3 & -4 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -4 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{-1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -4 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & \frac{-3}{2} & -2 & \frac{-1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0\end{array}\right) \to$$
  $\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$. Par suite, $\begin{cases} x - 2z - 2t = 0 \\ y - t = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x \ \ = 2z + 2t \\ \ \ y = t \end{cases}$
  $\to E_1 = \{(2z + 2t, t, z, t), z \in \mathbb{R}\} = Vect((2, 0, 1, 0), (2, 1, 0, 1) \Rightarrow dim(E_1) = 2$
- On a $dim(E_0) + dim(E_{-1}) + dim(E_1) = 1 + 1 + 2 = 4 = dim(\mathbb{R}^4) \to A_3$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Posons: $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P^{-1}.A_3.P =$
  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. $P_{A_4} = (1 - X)^2(X - 2)^2$ et $1, 2$ sont des racines de $P_{A_4}(X)$ (donc valeurs prorpes de f).

- $X = 1$, $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 1.v\} = Ker(f - 1Id)$
  GJ:
  $$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right) \to$$
  $$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Par conséquent, $\begin{cases} x - z + t = 0 \\ y - 2z + t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ \ = z - t \\ \ y = 2z - t \end{cases}$
$\rightarrow E_1 = \{(z - t, 2z - t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 2, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)) \Rightarrow dim(E_1) = 2$

- $X = 2$, $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 2.v\} = Ker(f - 2Id)$
GJ:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ \ = 0 \\ \ y = -z + t \end{cases}$$
$\rightarrow E_2 = \{(0, -z+t, z, t), z, t \in \mathbb{R}\} = Vect((0, -1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)) \Rightarrow dim(E_2) = 2$

- $dim(E_1) + dim(E_2) = 2 + 2 = 4 = dim(\mathbb{R}^4) \rightarrow A_4$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $P^{-1}A.P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, ici P est la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5 $A_5 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 & -14 \\ 4 & -1 & 7 & -15 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. $P_{A_5}(X) = (X - 1)^3(X + 1)$ et $X = 1, X = -1$ sont des racines de $P_{A_5}(X)$.

- $X = -1$, $E_{-1} = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = -1.v\} = Ker(f - (-1)Id)$.
GJ:
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 7 & -14 & 0 \\ 4 & -2 & 7 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2} & -7 & 0 \\ 4 & -1 & 7 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2} & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{7}{2} & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-13}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{7} & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
D'où $\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ z = 0, t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ = \frac{1}{2}y \\ \ z = 0 \\ t \ \ = 0 \end{cases} \rightarrow E_{-1} = \{(\frac{1}{2}y, y, 0, 0), y \in \mathbb{R}\} = Vect((\frac{1}{2}, 1, 0, 0)$.
et $dim(E_{-1}) = 1$

- $X = 1$, $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^4 : f(v) = 1.v\} = Ker(f - 1Id)$.
GJ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}4&-1&7&-14&0\\4&0&7&-15&0\\0&0&4&-4&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{-1}{4}&\frac{7}{4}&\frac{-7}{2}&0\\4&0&7&-15&0\\0&0&4&-4&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{-1}{4}&\frac{7}{4}&\frac{-7}{2}&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&4&-4&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{7}{4}&\frac{-15}{4}&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&4&-4&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&\frac{7}{4}&\frac{-15}{4}&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&2&-2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&-2&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

Il s'ensuit que $\begin{cases}x-2t=0\\y-t=0\\z-t=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\quad=2y\\y\ \ =t\\z=t\end{cases}\rightarrow E_1=\{(2t,t,t,t),t\in\mathbb{R}\}=$ $Vect((2,1,1,1)$. et $dim(E_1)=1$

- $dim(E_{-1})+dim(E_1)=1+1=2\neq dim(\mathbb{R}^4)\rightarrow A_5$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.

Exercice 5. 1. $A=\begin{pmatrix}-1&2&3\\0&-2&0\\1&2&1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}P_A(X)=det(A-X.Id)=det(&\begin{pmatrix}-1-X&2&3\\0&-2-X&0\\1&2&1-X\end{pmatrix}\\&=(X+2)^2(2-X).\end{aligned}$$

Donc $X=-2,X=2$ sont des racines de $P_A(X)$.

- $X=-2$ $E_{-2}=\{v\in\mathbb{R}^3:f(v)=-2.v\}=Ker(f-(-2)Id)$.
  Pratiquons GJ:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&0&0&0\\1&2&3&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$
  Cela implique $x+2y+3z=0\Rightarrow x=-2y-3z\Rightarrow E_{-2}=\{(-2y-3z,y,z)\}=$ $Vect((-2,1,0),(-3,0,1))\rightarrow dim(E_{-2})=2$
- $X=2$, $E_2=\{v\in\mathbb{R}^3:f(v)=2.v\}=Ker(f-2Id)$.
  GJ:
  $$\left(\begin{array}{ccc|c}-3&2&3&0\\0&-4&0&0\\1&2&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{-2}{3}&-1&0\\0&-4&0&0\\1&2&-1&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{-2}{3}&-1&0\\0&-4&0&0\\0&\frac{8}{3}&0&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&\frac{-2}{3}&-1&0\\0&1&0&0\\0&\frac{8}{3}&0&0\end{array}\right)\rightarrow$$
  $\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases}x-z=0\\y=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x\ \ =z\\y=0\end{cases}\rightarrow E_2=\{(z,0,z),z\in\mathbb{R}\}=$ $Vect((1,0,1)$. et $dim(E_2)=1$

- $dim(E_{-2}) + dim(E_2) = 2 + 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Notons $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage pour la diagonalisation, alors: $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to A = P.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1}$. Par conséquent:

$$A^n = (P.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1}).(P.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1})...(P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.P^{-1})$$
$$= P.\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.P^{-1}$$

Il reste à calculer P^{-1}. Pratiquons GJ:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et on peut enfin calculer :

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^n & (-2)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. $P_A(X) = (1-X)(X+4)(X-3)$ donc $1, -4, 3$ sont 3 racines distinctes de $P_A(X)$.

- $X = 1$, $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = .v\} = Ker(f - Id)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Cela implique: $\begin{cases} x - \frac{1}{3}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ = \frac{1}{3}z \\ \ y = 0 \end{cases}$

$\rightarrow E_1 = \{(\frac{1}{3}z, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect((\frac{1}{3}, 0, 1)$. et $dim(E_1) = 1$

- $X = -4$, $E_{-4} = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = -4.v\} = Ker(f - (-4)Id)$.
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - 5z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ = -3z \\ \ y = 5z \end{cases}$
  $\rightarrow E_{-4} = \{(-3z, 5z, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect((-3, 5, 1)$. et $dim(E_{-4}) = 1$

- $X = 3$, $E_3 = \{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = 3.v\} = Ker(f - 3Id)$.
  $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$
  $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x + 3z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ = -3z \\ \ y = -2z \end{cases}$
  $\rightarrow E_3 = \{(-3z, -2z, z), z \in \mathbb{R}\} = Vect((-3, -2, 1)$. et $dim(E_3) = 1$

- $dim(E_1) + dim(E_{-4}) + dim(E_3) = 1 + 1 + 1 = 3 \rightarrow A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  Notons $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, par le même raisonnement qu'en question 1, on a : $A = P. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .P^{-1}$.
  Par Gauss-Jordan on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & 0 & \frac{9}{10} \\ \frac{-3}{35} & \frac{5}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-1}{7} & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$ d'où la formule de A^n.